La matematica è un rompicapo

Come fare matematica divertendosi

Maurizio Paolini (paolini@dmf.unicatt.it)

Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Università Cattolica, Brescia

Circolo Matematico (PLS), Trieste, 2 dicembre 2016

Indice

- il "Rubik's Magic"
- Perché i rompicapi?
- "Se e solo se...", ovvero costruttiva / non costruttiva, ovvero $\exists/\forall$
- Decorazioni sì, decorazioni no
- Invarianti
- Caccia alla forma

Il Rubik's Magic

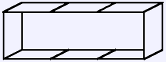
Si tratta di 8 tessere rigide quadrate decorate opportunamente e tenute insieme da alcuni fili di nylon.

Si tratta di 8 tessere rigide quadrate decorate opportunamente e tenute insieme da alcuni fili di nylon.

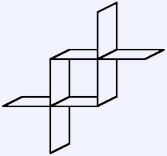
E' possibile manipolare il rompicapo ruotando una o più tessere rispetto ai lati con cui sono incernierate alle altre; l'aspetto interessante (e sorprendente) è che il modo con cui sono tra loro incernierate non è fisso, ma può cambiare durante le manipolazioni. Lo scopo dichiarato è quello di sistemare le tessere del "retro" del puzzle in modo da formare il disegno di tre anelli intrecciati. Nel far questo verrà inevitabilmente mescolato il disegno dei tre anelli separati sulla faccia frontale.

Alcune semplici configurazioni...

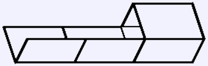
Ecco l'effetto di manipolazioni semplici:



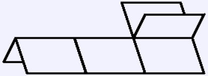
cingolo



caramella

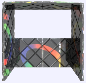


grondaia

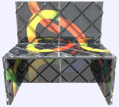


coniglio

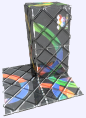
Forme più complesse:



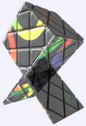
pensilina



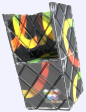
panchina



grattacielo



the-cube



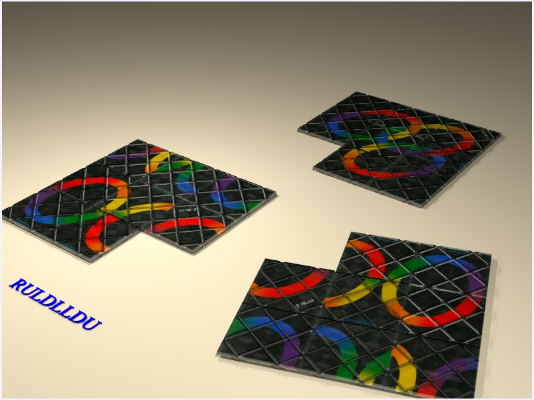
poltrona

Effetto sorpresa...

Il rompicapo risolto:

Effetto sorpresa...

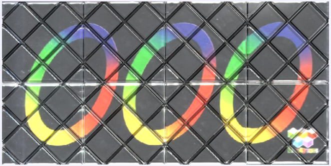
Il rompicapo risolto:



richiede una disposizione delle tessere inaspettata: un quadrato 3x3 senza un angolo.

Scaldiamo i muscoli: Homing, tornare a casa...

Da rettangolo 2×4: saper ritornare alla configurazione iniziale.

 $\Longrightarrow$ 

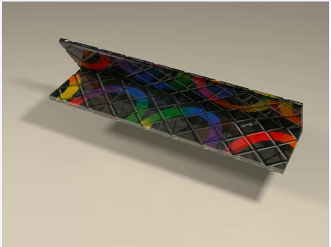
Esploriamo i dintorni di casa allontanandoci sempre di più:

1. Mossa **a raggiera**: *paravento* + *volta-pagina*. Osservare l'effetto che ha sulle decorazioni.
2. Mossa **cingolo**.
3. Mossa **finestra**.
4. Mossa **composta**: *finestra* + *raggiera* + *finestra*

In definitiva: `c?d?b?a*`.

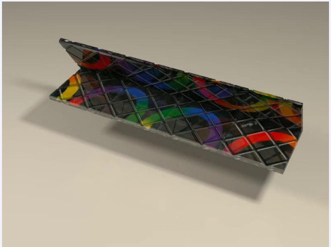
Targeting: imparo la strada a memoria

E' sufficiente imparare a memoria la breve sequenza di mosse per passare dalla configurazione iniziale (con l'immagine frontale composta e orientata correttamente) a quella con l'immagine sul retro ben sistemata.



Targeting: imparo la strada a memoria

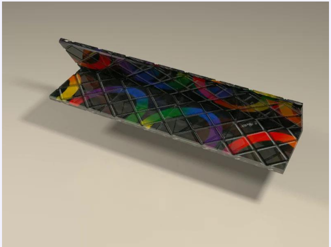
E' sufficiente imparare a memoria la breve sequenza di mosse per passare dalla configurazione iniziale (con l'immagine frontale composta e orientata correttamente) a quella con l'immagine sul retro ben sistemata.



Record di soluzione:

Targeting: imparo la strada a memoria

E' sufficiente imparare a memoria la breve sequenza di mosse per passare dalla configurazione iniziale (con l'immagine frontale composta e orientata correttamente) a quella con l'immagine sul retro ben sistemata.



Record di soluzione:

0.69 secondi!

Le otto tessere, che chiameremo T_0, T_1, ..., T_7,

- sono sempre collegate in una catena chiusa, T_0 con T_1 (e con T_7), T_1 con T_2, ecc.

La meccanica del rompicapo

Le otto tessere, che chiameremo T_0, T_1, ..., T_7,

- sono sempre collegate in una catena chiusa, T_0 con T_1 (e con T_7), T_1 con T_2, ecc.
- sono sempre incernierate rispetto ad un lato, ciascuna con la successiva

La meccanica del rompicapo

Le otto tessere, che chiameremo T_0, T_1, ..., T_7,

- sono sempre collegate in una catena chiusa, T_0 con T_1 (e con T_7), T_1 con T_2, ecc.
- sono sempre incernierate rispetto ad un lato, ciascuna con la successiva
- ma il lato di *incernieramento* può cambiare durante le manipolazioni (effetto Giacobbe)

Le otto tessere, che chiameremo T_0, T_1, ..., T_7,

- sono sempre collegate in una catena chiusa, T_0 con T_1 (e con T_7), T_1 con T_2, ecc.
- sono sempre incernierate rispetto ad un lato, ciascuna con la successiva
- ma il lato di *incernieramento* può cambiare durante le manipolazioni (effetto Giacobbe)

[Spiegare con l'aiuto del modello di cartone]

Rompicapi imparentati

Rompicapi imparentati

Rompicapi imparentati

Rompicapi imparentati





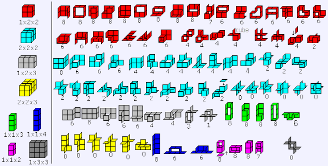


Effetto "esaflexagono": si tende a fare sempre le stesse mosse ottenendo solo un numero molto ristretto di configurazioni rispetto a quelle effettivamente ottenibili, tra cui:

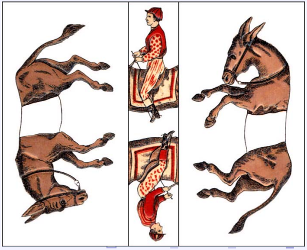
Rompicapi imparentati




Effetto "esaflexagono": si tende a fare sempre le stesse mosse ottenendo solo un numero molto ristretto di configurazioni rispetto a quelle effettivamente ottenibili, tra cui:



Rompicapi... e rompicapi



Risolvere un rompicapo (per un matematico)

Risolvere un rompicapo (cubo di Rubik, gioco del 15, ...):

Identificare tutte le configurazioni possibili e saperle costruire. Questo è lo stesso che saper ritornare alla configurazione iniziale dopo averlo "mescolato"

- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!

Esempio: il cubo di Rubik "concreto" ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

Risolvere un rompicapo (per un matematico)

Risolvere un rompicapo (cubo di Rubik, gioco del 15, ...):

Identificare tutte le configurazioni possibili e saperle costruire.
Questo è lo stesso che saper ritornare alla configurazione iniziale dopo averlo "mescolato"

- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!

Esempio: il cubo di Rubik "concreto" ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

Risolvere un rompicapo (per un matematico)

Risolvere un rompicapo (cubo di Rubik, gioco del 15, ...):

Identificare tutte le configurazioni possibili e saperle costruire.
Questo è lo stesso che saper ritornare alla configurazione iniziale dopo averlo "mescolato"

- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!

Esempio: il cubo di Rubik "concreto" ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

In genere, analizzare un rompicapo vuol dire

Problema:

Identificare l'insieme $X \subseteq C$ delle configurazioni raggiungibili con manipolazioni ammissibili

Dove C è un insieme di configurazioni che soddisfano opportuni vincoli di base (configurazioni ammissibili). $[8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}]$
Questo avviene con una azione combinata:

Risolvere i rompicapi [ovvero: ... e viceversa ...]

In genere, analizzare un rompicapo vuol dire

Problema:

Identificare l'insieme $X \subseteq C$ delle configurazioni raggiungibili con manipolazioni ammissibili

Dove C è un insieme di configurazioni che soddisfano opportuni vincoli di base (configurazioni ammissibili). $[8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}]$
Questo avviene con una azione combinata:

- Ottenere un insieme $E \subseteq C$, più grande possibile, di configurazioni che si sanno effettivamente ottenere. Questa è la parte "costruttiva", la meno matematicamente interessante.

Risolvere i rompicapi [ovvero: ... e viceversa ...]

In genere, analizzare un rompicapo vuol dire

Problema:

Identificare l'insieme $X \subseteq C$ delle configurazioni raggiungibili con manipolazioni ammissibili

Dove C è un insieme di configurazioni che soddisfano opportuni vincoli di base (configurazioni ammissibili). $[8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}]$
Questo avviene con una azione combinata:

- Ottenere un insieme $E \subseteq C$, più grande possibile, di configurazioni che si sanno effettivamente ottenere. Questa è la parte "costruttiva", la meno matematicamente interessante.
- Individuare un insieme P, più grande possibile, di configurazioni che **sicuramente non si possono ottenere** manipolando il rompicapo. Questa è la parte "non costruttiva", e presenta spesso interessanti spunti matematici. [...diviso 12]

Risolvere i rompicapi [ovvero: ... e viceversa ...]

In genere, analizzare un rompicapo vuol dire

Problema:

Identificare l'insieme $X \subseteq C$ delle configurazioni raggiungibili con manipolazioni ammissibili

Dove C è un insieme di configurazioni che soddisfano opportuni vincoli di base (configurazioni ammissibili). $[8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}]$
Questo avviene con una azione combinata:

- Ottenere un insieme $E \subseteq C$, più grande possibile, di configurazioni che si sanno effettivamente ottenere. Questa è la parte "costruttiva", la meno matematicamente interessante.
- Individuare un insieme P, più grande possibile, di configurazioni che **sicuramente non si possono ottenere** manipolando il rompicapo. Questa è la parte "non costruttiva", e presenta spesso interessanti spunti matematici. [...diviso 12]

Ovviamente $E \cap P = \varnothing$ e $E \subseteq X \subseteq C \setminus P$.
Se $E \cup P = C$, allora abbiamo individuato X!

Delimitare il campo...

In molti casi (cubo di Rubik, gioco del 15, ...) l'insieme C è finito (non infinito).
Per il Rubik's Magic invece bisogna "delimitare il campo" per poterlo studiare:

Delimitare il campo...

In molti casi (cubo di Rubik, gioco del 15, ...) l'insieme C è finito (non infinito).
Per il Rubik's Magic invece bisogna "delimitare il campo" per poterlo studiare:

- forme piane senza sovrapposizioni (ce ne sono solo due, ma come dimostrarlo?)

Delimitare il campo...

In molti casi (cubo di Rubik, gioco del 15, ...) l'insieme C è finito (non infinito).
Per il Rubik's Magic invece bisogna "delimitare il campo" per poterlo studiare:

- forme piane senza sovrapposizioni (ce ne sono solo due, ma come dimostrarlo?)
- forme tipo "tetris" [Nourse]: $3 + 4 + 8 = 15$

Delimitare il campo...

In molti casi (cubo di Rubik, gioco del 15, ...) l'insieme C è finito (non infinito).
Per il Rubik's Magic invece bisogna "delimitare il campo" per poterlo studiare:

- forme piane senza sovrapposizioni (ce ne sono solo due, ma come dimostrarlo?)
- forme tipo "tetris" [Nourse]: $3 + 4 + 8 = 15$
- forme piane a faccia in su: ce n'è un numero compreso tra 20 e 25

Delimitare il campo...

In molti casi (cubo di Rubik, gioco del 15, ...) l'insieme C è finito (non infinito).
Per il Rubik's Magic invece bisogna "delimitare il campo" per poterlo studiare:

- forme piane senza sovrapposizioni (ce ne sono solo due, ma come dimostrarlo?)
- forme tipo "tetris" [Nourse]: $3 + 4 + 8 = 15$
- forme piane a faccia in su: ce n'è un numero compreso tra 20 e 25
- forme 3D "squadrate" (octominoidi): 460

Gli invarianti

Un **invariante** è un oggetto matematico (un numero, un polinomio, un gruppo, ...) che può essere calcolato su una configurazione e che si dimostra essere invariante rispetto alle mosse elementari del rompicapo. Se una configurazione presenta un invariante con valore diverso rispetto a quello che ha nella configurazione iniziale, allora quella configurazione **non è** ottenibile!

Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato mescolato iniziale...**
Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato mescolato iniziale...**
Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Possiamo suddividere il problema in due fasi nettamente distinte.

Divide et impera!

Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato mescolato iniziale...**
Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Possiamo suddividere il problema in due fasi nettamente distinte.

Divide et impera!

1. Saper disporre le tessere decorate in tutti i modi possibili (quelli leciti) **nella forma di rettangolo** 2×4. Ce ne sono $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 128$, che si riducono a 32 se si tiene conto delle isometrie di un rettangolo;

Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato mescolato iniziale...**
Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Possiamo suddividere il problema in due fasi nettamente distinte.

Divide et impera!

1. Saper disporre le tessere decorate in tutti i modi possibili (quelli leciti) **nella forma di rettangolo** 2×4. Ce ne sono $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 128$, che si riducono a 32 se si tiene conto delle isometrie di un rettangolo;
2. Saper costruire tutte le forme (configurazioni) possibili di un rompicapo **senza decorazioni**.

Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato mescolato iniziale...**
Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Possiamo suddividere il problema in due fasi nettamente distinte.

Divide et impera!

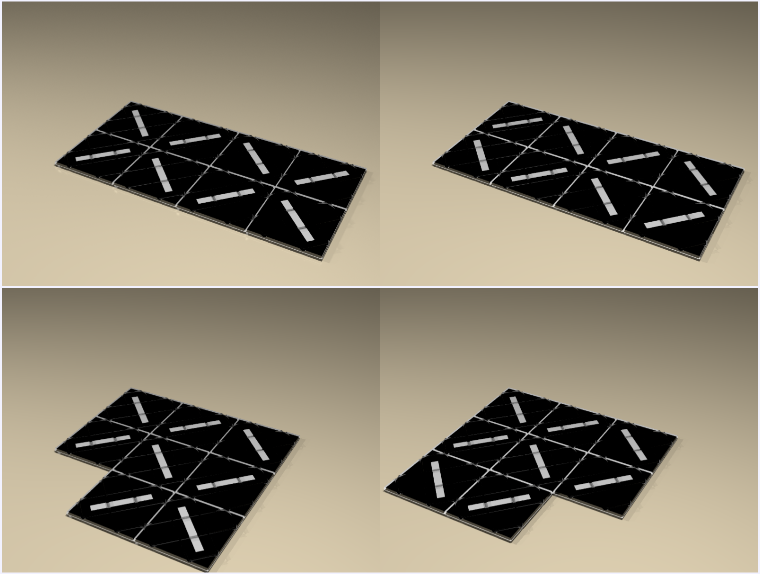
1. Saper disporre le tessere decorate in tutti i modi possibili (quelli leciti) **nella forma di rettangolo** 2×4. Ce ne sono $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 128$, che si riducono a 32 se si tiene conto delle isometrie di un rettangolo;
2. Saper costruire tutte le forme (configurazioni) possibili di un rompicapo **senza decorazioni**.

Problema risolto! [spiegare]

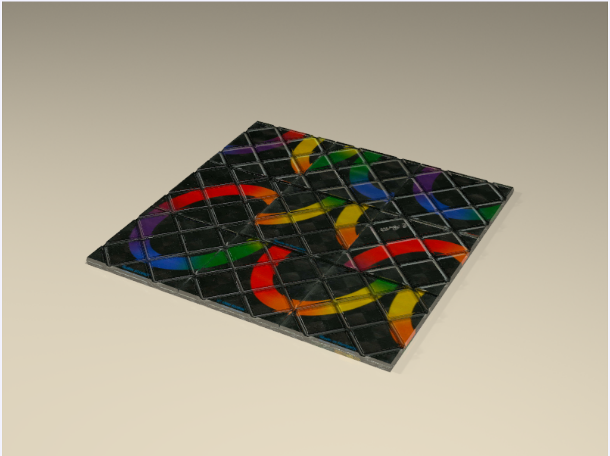
Fase 1: Disporre le tessere decorate...

I vincoli meccanici permettono di limitare a 128 le possibili disposizioni delle tessere, poi basta ideare un insieme di "mosse" (manipolazioni opportune del rompicapo) che permettano, opportunamente combinate, di ottenere tutte le disposizioni. Questo lo sappiamo già fare!

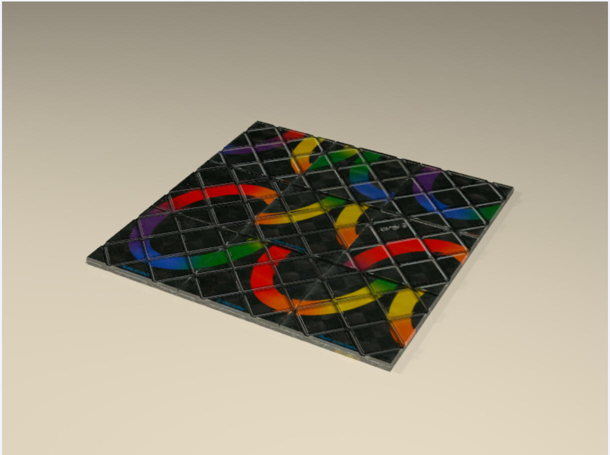
Fase 2: Il rompicapo senza decorazioni



Gli invarianti (1)

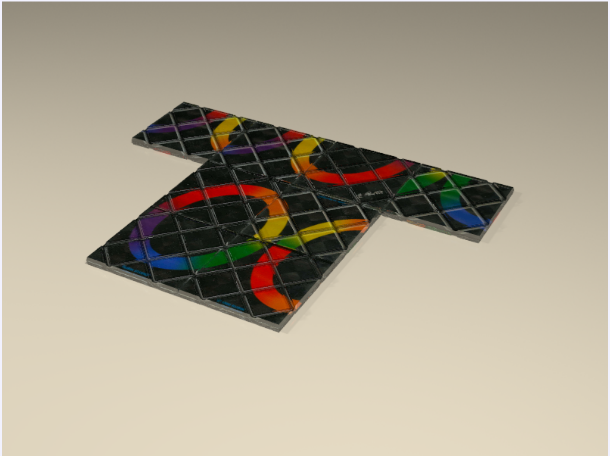


Gli invarianti (1)

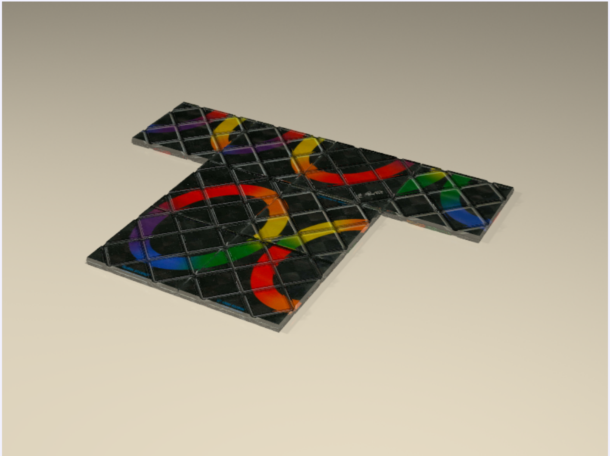


Il numero di tessere è (ovviamente) invariante!

Gli invarianti (2)

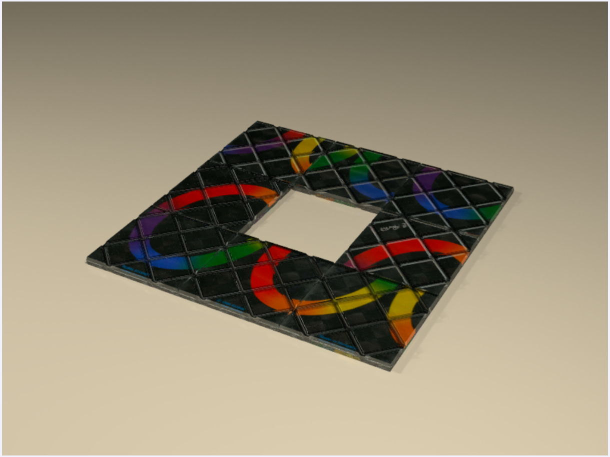


Gli invarianti (2)

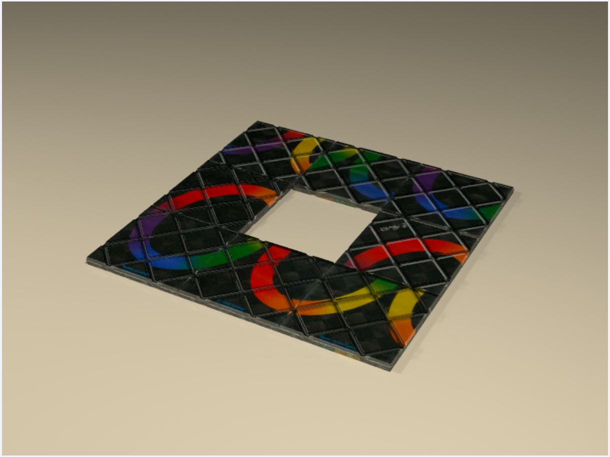


Le tessere devono essere collegate tra loro in una lista circolare

Gli invarianti (3)

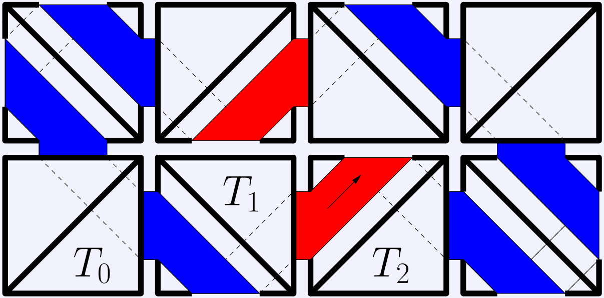


Gli invarianti (3)



Escludere questa configurazione è più delicato...

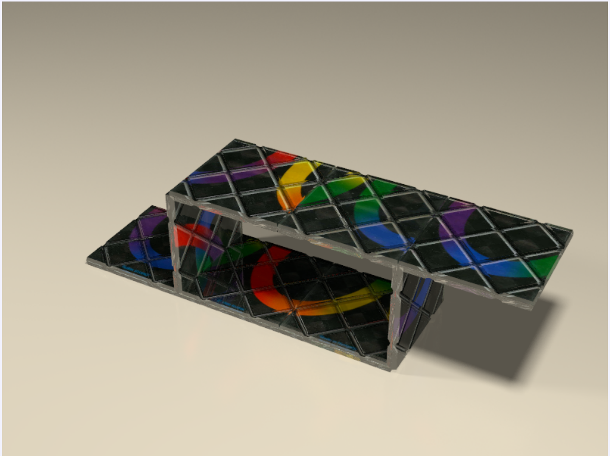
L'artifizio del nastro



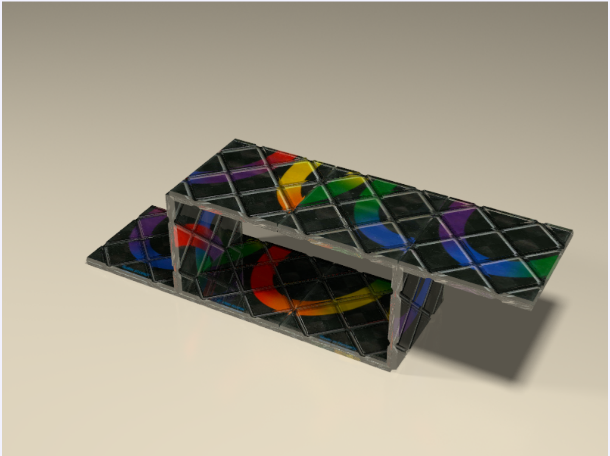
Inseriamo idealmente una fettuccia di stoffa tra le tessere come mostrato, che si dimostra non interferire con le manipolazioni del rompicapo.

La lunghezza del nastro è sempre la stessa, quindi escludiamo configurazioni che implicherebbero un nastro di lunghezza maggiore o minore $\Longrightarrow$ **invariante metrico**

Gli invarianti (4)



Gli invarianti (4)

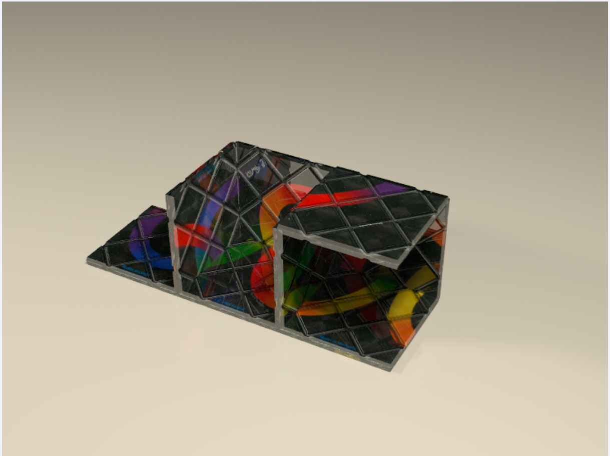


Il nastro dell'artifizio è topologicamente equivalente alla superficie laterale di un cilindro $\Longrightarrow$ **invariante topologico**, linking number (numero di allacciamento) tra i due bordi del nastro.

Gli invarianti (5)

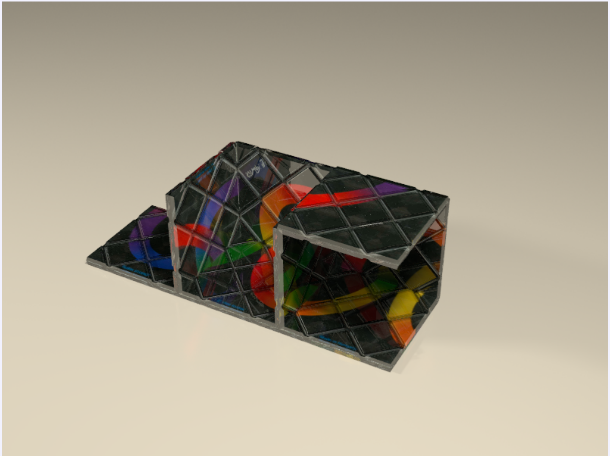
In effetti tutte le forme non escluse si sono rivelate costruibili, ma...

In effetti tutte le forme non escluse si sono rivelate costruibili, ma...



Gli invarianti (5)

In effetti tutte le forme non escluse si sono rivelate costruibili, ma...



Questa configurazione e alcune altre hanno richiesto molti sforzi!

Un po' di numeri

Per "contare" le possibili forme dobbiamo delimitare il campo. Un modo (non ovviamente l'unico) consiste nel limitarsi ai cosiddetti **octominoidi**: otto quadrati nello spazio disposti secondo un reticolo cubico e formanti un insieme connesso (come i polimini in 2D).

- Forziamo tutti gli angoli ad essere multipli di 90 gradi;
- Impediamo la presenza di tessere giustapposte.

Ragioneremo sempre *a meno di simmetrie*, riflessione compresa.

Contiamo le configurazioni

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

Contiamo le configurazioni

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

- 1718 sono ottenibili come catene chiuse

Contiamo le configurazioni

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**

Contiamo le configurazioni

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**
- 455 di queste rispettano il vincolo dell'**invariante metrico**

Contiamo le configurazioni

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

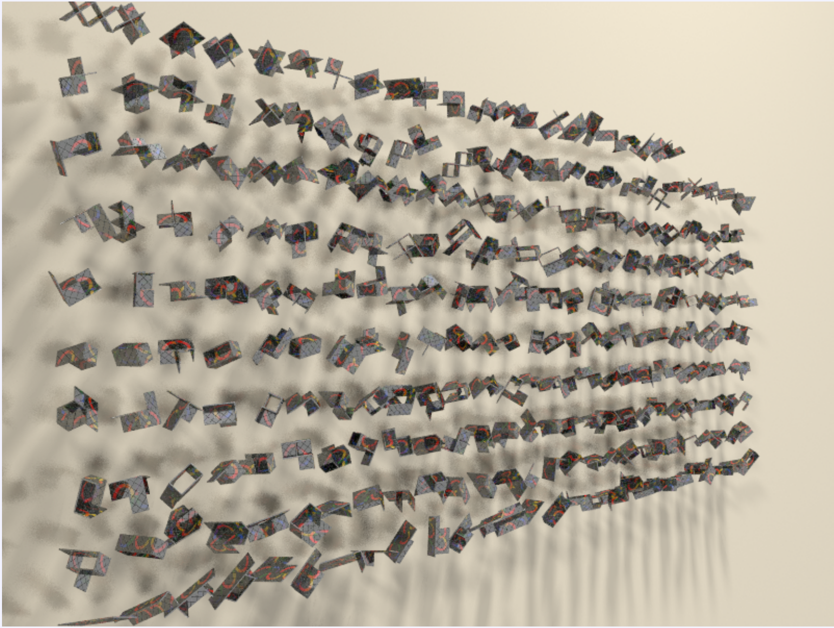
- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**
- 455 di queste rispettano il vincolo dell'**invariante metrico**
- 265 di queste rispettano anche il vincolo **topologico**, **e sono state tutte ottenute**.

Contiamo le configurazioni

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

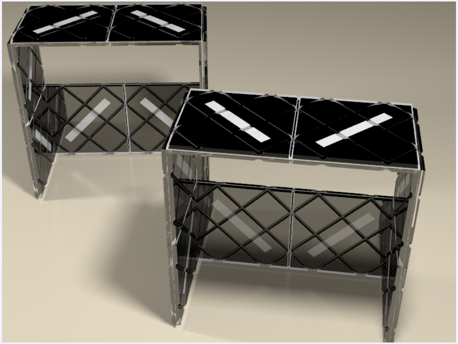
- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**
- 455 di queste rispettano il vincolo dell'**invariante metrico**
- 265 di queste rispettano anche il vincolo **topologico**, **e sono state tutte ottenute**.
- 105 di queste sono forme simmetriche, 160 sono non simmetriche.

Contiamo le configurazioni



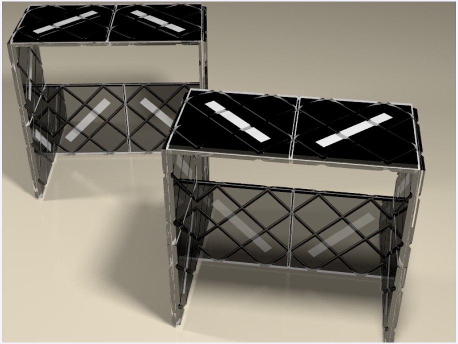
Contiamo le configurazioni (2)

Un particolare octominode può spesso essere ottenuto con configurazioni diverse del rompicapo non decorato:



Contiamo le configurazioni (2)

Un particolare octominode può spesso essere ottenuto con configurazioni diverse del rompicapo non decorato:



Abbiamo:

- 1291 configurazioni chiuse e orientabili; [582]
- 737 con invariante metrico rispettato; [455]
- 460 con rispettato anche l'invariante topologico. [265]

La scelta del modello

Due livelli

- Scelta del modello geometrico
  - Otto quadrati rigidi unitari in $\mathbb{R}^3$ (spessore "infinitesimo"), sempre incernierati, T_k con T_{k+1}, tramite un lato comune...
  - **Oppure:** Devo permettere un po' di elasticità? Se sì, quanta?
- Costruzione del modello matematico (algebrizzazione)

È un modello! Cosa può andare storto?

La scelta del modello

Due livelli

- Scelta del modello geometrico
  - Otto quadrati rigidi unitari in $\mathbb{R}^3$ (spessore "infinitesimo"), sempre incernierati, T_k con T_{k+1}, tramite un lato comune...
  - **Oppure:** Devo permettere un po' di elasticità? Se sì, quanta?
- Costruzione del modello matematico (algebrizzazione)

È un modello! Cosa può andare storto?

1. Il modello può essere troppo "liberale", le tessere reali hanno uno spessore per nulla infinitesimo, che non mi permette ad esempio di impilare tutte le otto tessere una sull'altra, il modello geometrico invece ce lo permette.

La scelta del modello

Due livelli

- Scelta del modello geometrico
  - Otto quadrati rigidi unitari in $\mathbb{R}^3$ (spessore "infinitesimo"), sempre incernierati, T_k con T_{k+1}, tramite un lato comune...
  - **Oppure:** Devo permettere un po' di elasticità? Se sì, quanta?
- Costruzione del modello matematico (algebrizzazione)

È un modello! Cosa può andare storto?

1. Il modello può essere troppo "liberale", le tessere reali hanno uno spessore per nulla infinitesimo, che non mi permette ad esempio di impilare tutte le otto tessere una sull'altra, il modello geometrico invece ce lo permette.
2. Ma succede anche il contrario: ci sono manipolazioni tranquillamente fattibili con il rompicapo vero, ma che il modello geometrico non permette. [provare a far vedere un esempio]

Vogliamo studiare il rompicapo reale, non una sua idealizzazione matematica, quindi non vogliamo essere troppo "rigidi" e lasciamo un po' di libertà nella scelta del modello.

Un utilizzo creativo

Ecco un utilizzo creativo del Rubik's Magic...

Siti web e riferimenti bibliografici

- http://rubiksmagic.dmf.unicatt.it/
  Studio configurazioni 3D "octominoidi".
- https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik's_Magic
  Pagina wikipedia.
- http://www.mathematische-basteleien.de/magics.htm
  Descrizione a cura di Jürgen Köller.

- A. Fiore, Making Rubik's MAGIC, Puffin/Penguin Books, 1986.
- J. Nourse, Simple Solutions to Rubik's MAGIC, Bantam Books, 1986
- M. Paolini, *Exploring the "Rubik's Magic" universe*, arXiv:1401.3699 [math.CO]
- T. Verhoeff, *Magic and Is Nho Magic*, Cubism For Fun (15), 24–31.

GRAZIE DELL'ATTENZIONE!

Gara: caccia alla forma

Scopo: Ottenere più forme possibili in un insieme prestabilito

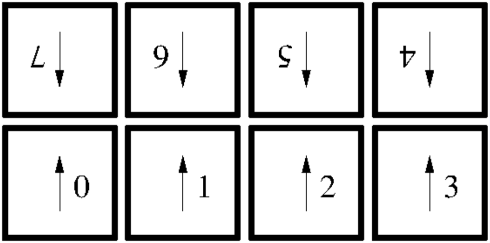
Strumenti:

- Un esemplare “canonico” del rompicapo (fornito dall’organizzazione, **da restituire!**)
- Accesso ad internet: `http://dmf.unicatt.it/circolomatematico/`

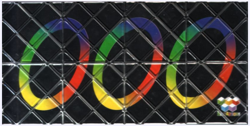
Durata: Da definire
Numero di partecipanti: max 20.
Istruzioni: le trovate all’indirizzo web indicato sopra.
Giuria: Da definire

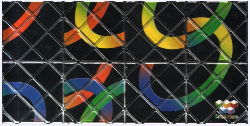
Le forme da ottenere in gara

Il “codice” corrispondente ad una forma consiste in una sequenza di lettere che descrive la forma ottenuta. Questa si ottiene effettuando i cinque passi descritti di seguito. Può essere utile appiccicare delle piccole etichette (attenzione a non interferire con i fili di nylon) sul fronte delle otto tessere con il numero della tessera, da 0 a 7, e una freccia che ne indichi l’orientazione:



Passo 1: identificare la tessera iniziale T_0 e la successiva T_1





Fronte (sinistra) e retro (destra) del rompicapo nello stato iniziale.

Nella configurazione iniziale con visibili gli anelli non intrecciati la tessera di base T_0 si trova in basso a sinistra, la tessera T_1 è quella affiancata alla sua destra, quindi la seconda della riga inferiore. Entrambe le tessere T_0 e T_1 le pensiamo dotate di una freccia sulla faccia anteriore che punta verso l'alto e che permette di orientarle. In una configurazione manipolata, la tessera T_0 può essere individuata così: il suo "retro" si riconosce per la presenza del marchio di fabbrica e un tratto di colore verde della decorazione.

T_0 fronte

T_0 retro

T_1 fronte

T_1 retro

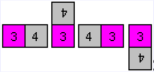
Passo 2: partire con il piede giusto

La tessera T_0 è adiacente sia a T_1 che a T_7. E' quindi importante individuare correttamente la tessera T_1, che può trovarsi in una qualsiasi delle quattro direzioni rispetto a T_0, non necessariamente alla sua destra!

Passo 3: Posizione relativa di una tessera rispetto alla precedente.

In qualunque configurazione costruibile le otto tessere sono sempre collegate in modo circolare, ciascuna alla successiva, tramite un lato comune. Immaginando di aver orientato la tessera T_n con una freccia su una delle sue facce, la tessera successiva T_{n+1} può essere collegata a T_n tramite uno dei lati `R` (right: destra), `L` (left: sinistra), `U` (up: su), `D` (down: giù) della tessera T_n. Inoltre le due tessere possono formare tra di loro un angolo che per le configurazioni per noi ammissibili è di 90 gradi, o a monte (codice `m`), o a valle (codice `v`). La posizione relativa di T_{n+1} rispetto a T_n si riassume dunque in una lettera maiuscola tra `R`, `L`, `U`, `D` opzionalmente seguita da una lettera minuscola (`m` o `v`).

Passo 4: Come orientare le tessere

L'orientazione delle tessere (la freccia che immaginiamo disegnata su una delle facce) viene ereditata da una tessera alla successiva e segue le regole illustrate nel disegno 

sostituendo nel modo ovvio le frecce ai numeri 3 e 4. In particolare le direzioni `U` e `D` ribaltano il verso della freccia.

Passo 5: Il codice.

A questo punto è sufficiente annotare uno dopo l'altro i codici che descrivono la posizione relativa di ciascun tassello rispetto al precedente partendo dal tassello T_0, orientato come spiegato al passo 1 e facendo attenzione ad orientare i vari tasselli come descritto nel passo 4. Ne risulta una sequenza di caratteri che chiamiamo **codice della configurazione**. Ad esempio la forma rettangolare 2×4 iniziale è descritta dal codice `RRRURRRU`. La sequenze `RRmDmLmURmUmLm` descrive invece la forma di una poltrona. Per semplificare l'immissione del codice l'interfaccia web accetta indifferentemente caratteri maiuscoli e minuscoli e li converte secondo le regole descritte al passo 3.