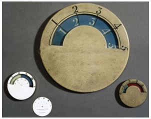
Equazioni e insolubilità

(sul 10º problema di Hilbert)

Eugenio G. Omodeo

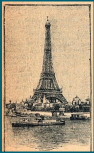
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



Trieste, 12 gennaio 2018

Intervento al **Circolo Matematico**



8 Agosto 1900

secondo Congresso Internazionale dei Matematici

"Il giorno presente, che sta all'incontro tra secoli, mi pare appropriato a tale rassegna di problemi ..."

(David Hilbert)

Determinazione della risolubilità di un'equazione diofantea.

Data un'equazione diofantea in qualsiasi numero d'incognite e a coefficienti interi: *Ideare un procedimento per mezzo del quale si possa stabilire, in un numero finito di operazioni, se l'equazione abbia o no soluzione negli interi*.

Determinazione della risolubilità di un'equazione diofantea.

Data un'equazione diofantea in qualsiasi numero d'incognite e a coefficienti interi: *Ideare un procedimento per mezzo del quale si possa stabilire, in un numero finito di operazioni, se l'equazione abbia o no soluzione negli interi*.

Es.: $(X-Y-Z)^2+(Y-Z-X)^2+(Z-X-Y)^2+X^2-X+Y^2-Y+Z^2-Z=0$

Determinazione della risolubilità di un'equazione diofantea.

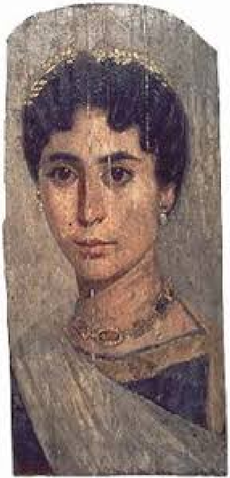
Data un'equazione $\boxed{\text{diofantea}}$ in qualsiasi numero d'incognite e a coefficienti interi: *Ideare un procedimento per mezzo del quale si possa stabilire, in un numero finito di operazioni, se l'equazione abbia o no soluzione negli interi.*

Es.: $(X-Y-Z)^2+(Y-Z-X)^2+(Z-X-Y)^2+X^2-X+Y^2-Y+Z^2-Z=0$

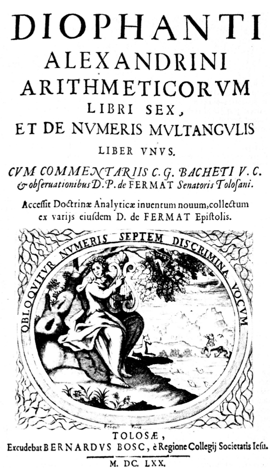
Che significa 'diofanteo' ? ☞

Chi era Diofanto ?

(Diofanto, nato ca. 200 *d.C.* ?)



(Diofanto, nato ca. 200 *d.C.* ?) (Ipazia, ca. 370 / 415 *d.C.*)


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

ANTOLOGIA GRECA, vol. XIV, epigramma n. 126

Questa tomba conserva Diofanto e, gran prodigio!,
dice scientificamente quanto durò la sua vita.
Un dio gli accordò un'infanzia pari a un sesto della sua vita,
aggiungendo alla quale una dodicesima parte,
rivestì di barba le guance.
Gli accese la luce delle nozze dopo una settima parte
e cinque anni dopo il matrimonio gli concesse un figlio.
Ahimè, tardivo figlio sventurato: quando raggiunse metà
della durata della vita del padre, un gelido fato se lo prese.
Questi, dopo aver consolato per quattro anni il proprio dolore
con la scienza dei numeri, giunse al termine della vita.

Chi era Diofanto


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

ANTOLOGIA GRECA, vol. XIV, epigramma n. 126

Questa tomba conserva Diofanto e, gran prodigio!,
dice scientificamente quanto durò la sua vita.
Un dio gli accordò un'infanzia pari a un sesto della sua vita,
aggiungendo alla quale una dodicesima parte,
rivestì di barba le guance.
Gli accese la luce delle nozze dopo una settima parte
e cinque anni dopo il matrimonio gli concesse un figlio.
Ahimè, tardivo figlio sventurato: quando raggiunse metà
della durata della vita del padre, un gelido fato se lo prese.
Questi, dopo aver consolato per quattro anni il proprio dolore
con la scienza dei numeri, giunse al termine della vita.

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Analisi del 10º problema

Equazione data

$D(\,x_1, \ldots, x_m\,) \;=\; 0 \quad \hookrightarrow$

Decisore algoritmico

$\mathfrak{H}$

$\hookrightarrow$ **sí** / **no**

Schema di un *ipotetico* risolutore per il 10º problema   il responso:

Equazione data

$$D(\,x_1, \ldots, x_m\,) \;=\; 0 \quad \hookrightarrow \quad \boxed{\text{Decisore algoritmico } \mathfrak{H}} \quad \hookrightarrow \quad \text{sí} \,/\, \text{no}$$

Schema di un *ipotetico* risolutore per il 10º problema il responso:
"**sí**" indicherebbe che c'è *almeno una* soluzione

$$\begin{cases} x_1 & = & \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & = & \boldsymbol{v}_m \end{cases}$$

dove ogni $\boldsymbol{v}_i$ è un $\boxed{\text{intero}}$ (positivo, negativo, o nullo);
"**no**" indicherebbe che non ve ne sono.

Equazione data

$D(x_1, \ldots, x_m) = 0 \quad \hookrightarrow$

Decisore algoritmico

$\hookrightarrow$ **sí / no**

L'espressione D che vogliamo rendere uguale a 0 è costruita a partire da

- *costanti* intere (ad es. 8 , -2 , $100\,003$);
- *incognite* x_i ;

tramite i costrutti $+$ ed $\cdot$ di *somma* e *moltiplicazione*.

In altre parole D designa un $\boxed{\text{polinomio}}$

(multivariato e di grado qualsiasi).

Che tipo di espressione è la $D(x_1, \ldots, x_m)$?

L'espressione D che vogliamo rendere uguale a 0 è costruita a partire da

- *costanti* intere (ad es. 8 , -2 , $100\,003$);
- *incognite* x_i ;

tramite i costrutti $+$ ed $\cdot$ di *somma* e *moltiplicazione*.

In altre parole D designa un $\boxed{\text{polinomio}}$

(multivariato e di grado qualsiasi).

Esempio:

$$x \cdot x \cdot x \cdot x + 1 \quad \Rrightarrow$$

$$x \cdot x + y \cdot y + (-1) \cdot z \cdot z \quad \Rrightarrow$$

L'espressione D che vogliamo rendere uguale a 0 è costruita a partire da

- *costanti* intere (ad es. 8 , -2 , $100\,003$);
- *incognite* x_i ;

tramite i costrutti $+$ ed $\cdot$ di *somma* e *moltiplicazione*.

In altre parole D designa un $\boxed{\text{polinomio}}$

(multivariato e di grado qualsiasi).

Esempio:

$$x \cdot x \cdot x \cdot x + 1 \quad \Rrightarrow \quad \text{no}$$

$$x \cdot x + y \cdot y + (-1) \cdot z \cdot z \quad \Rrightarrow$$

L'espressione D che vogliamo rendere uguale a 0 è costruita a partire da

- *costanti* intere (ad es. 8 , -2 , $100\,003$);
- *incognite* x_i ;

tramite i costrutti $+$ ed $\cdot$ di *somma* e *moltiplicazione*.

In altre parole D designa un $\boxed{\text{polinomio}}$

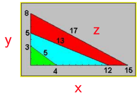
(multivariato e di grado qualsiasi).

Esempio:

$$x \cdot x \cdot x \cdot x + 1 \quad \Rrightarrow \quad \text{no}$$

$$x \cdot x + y \cdot y + (-1) \cdot z \cdot z \quad \Rrightarrow \quad \text{sí}$$

Terne pitagoriche



Che tipo di espressione è la $D(x_1, \dots, x_m)$?

L'espressione D che vogliamo rendere uguale a 0 è costruita a partire da

- *costanti* intere (ad es. 8 , -2 , $100\,003$);
- *incognite* x_i ;

tramite i costrutti $+$ ed $\cdot$ di *somma* e *moltiplicazione*.

In altre parole D designa un $\boxed{\text{polinomio}}$

(multivariato e di grado qualsiasi).

Esempio:

$$x \cdot x \cdot x \cdot x + 1 \quad \Rrightarrow \quad \text{no}$$

$$x \cdot x + y \cdot y + (-1) \cdot z \cdot z \quad \Rrightarrow \quad \text{sí}$$

Osservaz.: ☞ S'intravede un abisso fra x^2 e 2^x .

1. Equazioni nelle quali D ha solo un'incognita (fatto ben noto)

1. Equazioni nelle quali D ha solo un'incognita (fatto ben noto)
   Es.: Eventuali soluz. di $x^3 - 4\,x^2 + 5\,x - 2 = 0$ vanno cercate fra ......

3. Equazioni nelle quali *D* ha grado 2 (Carl L. Siegel, 1972)

2. Eq. $u^2 + v^2 + w^2 + z^2 - \boldsymbol{a} \;=\; 0$ con $\boldsymbol{a} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
   (Joseph L. Lagrange, 1770)
3. Equazioni nelle quali D ha grado 2 (Carl L. Siegel, 1972)

2. Eq. $u^2 + v^2 + w^2 + z^2 - \boldsymbol{a} \;=\; 0$ con $\boldsymbol{a} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
(Joseph L. Lagrange, 1770)

4. Equazioni della forma $(x+2)^2 - \boldsymbol{d}\, y^2 - 1 \;=\; 0$,
con $\boldsymbol{d} = 0, 1, 2, \ldots$, dove viene richiesto che $x \geqslant 0$
(Joseph L. Lagrange, 1768)

Soluzione di ❷ e di ❹

Teorema (Quattro quadrati)

L'equaz. ❷ *ha soluzione quando* $\boldsymbol{a} \geqslant 0$ *e ne è priva quando* $\boldsymbol{a} < 0$.

SOLUZIONE DI ❷ E DI ❹

TEOREMA (QUATTRO QUADRATI)

L'equaz. ❷ *ha soluzione quando* $\boldsymbol{a} \geqslant 0$ *e ne è priva quando* $\boldsymbol{a} < 0$.

Alla luce di ciò, il 10º problema di H. è equivalente al problema analogo riguardante la risolubilità nei numeri *naturali* (o interi > 0).

Es.: $X^7 + Y^7 = Z^7 \rightsquigarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Teorema (Equazione di Pell)

L'eq. ❹ ha soluz. per tutti i ***d*** *tranne per i quadrati perfetti.*

Soluzione di ❷ e di ❹

Teorema (Equazione di ~~Pell~~ Brahmagupta, 598–668*d.C.*)

*L'eq. ❹ ha infinite soluz. per tutti i **d** tranne per i quadrati perfetti.*

Calcola, o straniero, il numero dei buoi del Sole,
operando con cura, se possiedi una qualche sapienza;
calcola in qual numero pascolavano un tempo sulle pianure
dell'isola sicula di Trinacria, distribuiti in 4 gruppi
di vario colore: uno di aspetto bianco latteo,
il secondo splendente di color nero,
il terzo poi di un bruno dorato, il quarto screziato.

L'enigma dei buoi: Archimede (287–212 aC) ad Eratostene (276–194 aC)

Calcola, o straniero, il numero dei buoi del Sole,
operando con cura, se possiedi una qualche sapienza;
calcola in qual numero pascolavano un tempo sulle pianure
dell'isola sicula di Trinacria, distribuiti in 4 gruppi
di vario colore: uno di aspetto bianco latteo,
il secondo splendente di color nero,
il terzo poi di un bruno dorato, il quarto screziato.

In ogni gregge i tori erano distribuiti in considerevole quantità,
nei seguenti rapporti: ritieni i bianchi
come uguali alla metà della terza
parte di tutti i neri e ai bruni;
i neri, poi, uguali alla quarta parte
e alla quinta degli screziati e a tutti i bruni;
i restanti screziati considerali, poi,
come uguali alla sesta parte e alla settima parte
dei tori bianchi e di nuovo a tutti i bruni.

Le giovenche erano invece distribuite nei seguenti rapporti:
le bianche erano uguali precisamente alla terza
e alla quarta parte di tutto il gregge nero;
le nere alla quarta parte insieme alla quinta;
le nere alla quarta parte assieme
alla quinta parte delle screziate
prese insieme ai tori; le screziate
erano precisamente uguali alla quinta parte e alla sesta
di tutti gli animali del gregge bruno;
le brune, poi, uguali alla metà della terza parte
e alla settima parte del gregge bianco.

Calcola, o straniero, il numero dei buoi del Sole,
operando con cura, se possiedi una qualche sapienza;
calcola in qual numero pascolavano un tempo sulle pianure
dell'isola sicula di Trinacria, distribuiti in 4 gruppi
di vario colore: uno di aspetto bianco latteo,
il secondo splendente di color nero,
il terzo poi di un bruno dorato, il quarto screziato.

In ogni gregge i tori erano distribuiti in considerevole quantità,
nei seguenti rapporti: ritieni i bianchi
come uguali alla metà della terza
parte di tutti i neri e ai bruni;
i neri, poi, uguali alla quarta parte
e alla quinta degli screziati e a tutti i bruni;
i restanti screziati considerali, poi,
come uguali alla sesta parte e alla settima parte
dei tori bianchi e di nuovo a tutti i bruni.

Le giovenche erano invece distribuite nei seguenti rapporti:
le bianche erano uguali precisamente alla terza
e alla quarta parte di tutto il gregge nero;
le nere alla quarta parte insieme alla quinta;
le nere alla quarta parte assieme
alla quinta parte delle screziate
prese insieme ai tori; le screziate
erano precisamente uguali alla quinta parte e alla sesta
di tutti gli animali del gregge bruno;
le brune, poi, uguali alla metà della terza parte
e alla settima parte del gregge bianco.

Quando avrai, o straniero, determinato esattamente i buoi del Sole
avrai distinto quanti erano i tori in tutto
ed avrai anche trovato quanti erano di ciascun colore,
non ti si chiamerà ignorante o inabile nei numeri,
però non ti si potrà annoverare tra i sapienti. Ma ora
bada bene a questi altri rapporti fra i buoi del Sole.

Quando i tori bianchi si mescolavano ai neri
formavano un gruppo equilatero
in altezza e larghezza: le vaste pianure
della Trinacria erano allora tutte piene di buoi.
Invece i tori bruni e gli screziati
tra loro riuniti costituivano una bella figura
triangolare. Quando avrai trovato tutto questo
e l'avrai esposto sotto forma intelligibile
e avrai trovata anche la quantità totale dei buoi,
allora, o straniero, per quanto hai fatto va' superbo
come vincitore e sii certo che verrai considerato sapiente.

Equazioni diofantee *parametriche* sui *naturali*

Di qui in avanti considereremo equazioni diofantee con le variabili ripartite in *incognite* e *parametri*:

$$\text{Parametri} \qquad \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$$

$$\text{Eq.} \quad D(\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{incognite}}, \underbrace{q_1, \ldots, q_n}_{\text{parametri}}) \;=\; 0$$

e ci chiederemo:

"*per quali valori dei parametri l'equazione ha soluzione ?*",

considerando $\boxed{\text{solo}}$ soluzioni nei naturali e parametri $\geqslant 0$.

Esprimere come equazione diofantea parametrica:

1. $a \in \{4, 5, 9\}$
2. $a \neq b$ $\surd$
3. $a \in \{0, 3, 6, \ldots, 30\}$
4. Fra i divisori di a c'è un quadrato perfetto
5. a è un numero dispari $\surd$
6. a non è un divisore di b
7. a, b, c non è una terna pitagorica $\surd$
8. a è un numero *composto* (cioè $a \neq 0$, $a \neq 1$ ed a non è un primo)
9. a *non* è una potenza del 2
10. a è un num. triangolare, cioè della forma $1 + 2 + \cdots + x$ per qualche num. naturale x
11. $a \geqslant \mathit{MP2}(b)$, dove $\mathit{MP2}(b)$ esprime la massima potenza del 2 che divide b (ad es.: $\mathit{MP2}(5) = 1$, $\mathit{MP2}(12) = 4$)
12. $a > 0$ e inoltre l'equazione $$a\,X^2 + b\,X + c \;=\; 0$$ con X incognita *complessa* ha soluzioni *razionali*. $\surd$

Vero che $a - \left(x^2 + x + 41\right) = 0$ rappresenta un insieme di primi consecutivi ?

$\boxed{\text{Alfred Tarski}}$ scopre un algoritmo risolutivo per un problema *analogo* al 10º di H. — riferito, però, alle soluz. sui numeri $\boxed{\textit{reali}}$.[1]

(☞ Ma che dire della risolubilità sui numeri frazionari ?)

[1] Risultato che verrà finalmente pubblicato nel 1948.

Rialzo di aspettative: *Entscheidungsproblem*

Postulati $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ $\hookrightarrow$

Congettura $\mathfrak{t}$ $\hookrightarrow$

$$\boxed{\text{Decisore} \quad \mathfrak{T}}$$

$\hookrightarrow$ **sí** / **no**

Schema di un *ipotetico* risolutore per l'*Entscheidungsproblem*.

Postulati $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ $\hookrightarrow$

Congettura $\mathfrak{t}$ $\hookrightarrow$

Decisore

$\mathfrak{T}$

$\hookrightarrow$ **sí** / **no**

Schema di un *ipotetico* risolutore per l'*Entscheidungsproblem*.
Il "**sí**" direbbe che esistono dimostrazioni di $\mathfrak{t}$;
il "**no**" che non ve ne sono o addirittura che $\mathfrak{t}$ è *refutabile*

Rialzo di aspettative: *Entscheidungsproblem*

Postulati $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ $\hookrightarrow$
Congettura $\mathfrak{t}$ $\hookrightarrow$

$\boxed{\text{Decisore} \quad \mathfrak{T}}$ $\hookrightarrow$ **sí** / **no**

Schema di un *ipotetico* risolutore per l'*Entscheidungsproblem*.
Il "**sí**" direbbe che esistono dimostrazioni di $\mathfrak{t}$;
il "**no**" che non ve ne sono o addirittura che $\mathfrak{t}$ è *refutabile*.

Da postulati deboli potrebbe anche non discendere né $\mathfrak{t}$ né la tesi contraria $\overline{\mathfrak{t}}$; anche in tal caso la risposta del decisore sarebbe "**no**".

Assimiliamo a questo un risolutore per il 10º

Parametri $\quad \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \quad \hookrightarrow$ Decisore

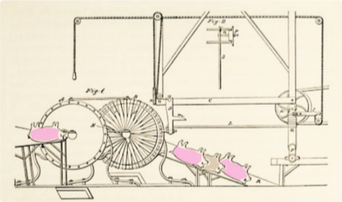
$\hookrightarrow$ **sí** / **no**

Eq. $\quad D(\, x_1, \ldots, x_m\, ,\; q_1\, , \ldots, q_n\,) \;=\; 0 \quad \hookrightarrow$ $\mathfrak{D}$

Schema di un *ipotetico* risolutore per eq. diofantee *parametriche*.

"... si potrebbe immaginare una macchina in cui introdurre gli assiomi da una parte mentre dall'altra si raccolgono i teoremi, come in una leggendaria macchina di Chicago i maiali entrano vivi per uscirne trasformati in prosciutti e salsicce. Il matematico non ha, piú di quelle macchine, bisogno di capire che cosa sta facendo."

(Henri Poincaré, 1908)



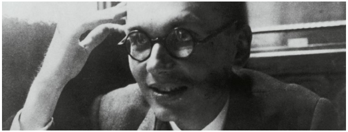
Pur aspettandosi che una tecnica per risolvere le equazioni diofantee sarebbe stata scoperta, Hilbert lasciava adito a un eventuale responso d'insolubilità

Ammissibile una soluzione 'negativa' del 10º ?

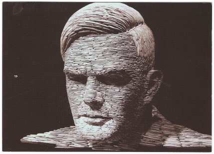
Pur aspettandosi che una tecnica per risolvere le equazioni diofantee sarebbe stata scoperta, Hilbert lasciava adito a un eventuale responso d'insolubilità:

> " $\cdots$ *ogni problema matematico, precisato con cura, sarà suscettibile di una composizione esatta: o nella forma di un'effettiva risposta a quanto domandato; o tramite la dimostrazione che una sua soluzione è impossibile, cosicché ogni tentativo deve per forza fallire.* " (Hilbert, 1900)

Rivelando l' $\boxed{\text{insolubilità algoritmica}}$ dell'*Entscheidungsproblem* riferito all'aritmetica di Dedekind–Peano (1888–1898), Gödel inaugura una stagione di risultati limitativi per la *logica* e la *computabilità*.



(K. Gödel, 1906–1978)



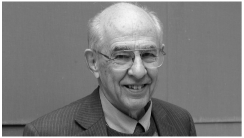
(A. M. Turing, 1912–1954)

(Julia Bowman Robinson, 1919–1985)

(Martin D. Davis, 1928–)

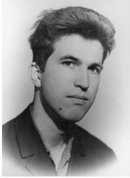
(Julia Bowman Robinson, 1919–1985)

(Martin D. Davis, 1928–)



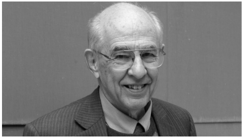
(Hilary Putnam, 1926–2016)

(Julia Bowman Robinson, 1919–1985)



(Yuri V. Matiyasevich, 1947–)

(Martin D. Davis, 1928–)



(Hilary Putnam, 1926–2016)

(Julia Bowman Robinson, 1919–1985)

"Per molte classiche equazioni diofantee con un parametro non è noto un metodo effettivo che, comunque venga fissato il parametro, dica se l'equazione ha soluzioni o no; perciò è poco plausibile che si possa trovare un procedimento di decisione. Ad esempio, non si conoscono metodi che determinino per quali valori di $\boldsymbol{a}$ il sistema diofanteo

$$x^2 + \boldsymbol{a}\, y^2 = s^2 , \qquad x^2 - \boldsymbol{a}\, y^2 = t^2$$

è risolubile. (Primi a studiare questo problema furono gli Arabi, nel Medio Evo)."

(Julia Bowman Robinson, 1952)

(1919–1975)

Due ipotesi temerarie

1. Julia Robinson punta a individuare un'eq. diofantea parametrica

$$D(x_1, \ldots, x_m, a, b) = 0$$

che abbia soluzione per tutte e sole le coppie $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ di interi positivi

1. Julia Robinson punta a individuare un'eq. diofantea parametrica

$$D(x_1, \ldots, x_m, \overset{\boldsymbol{a}}{\overset{\downarrow}{a}}, \overset{\boldsymbol{b}}{\overset{\downarrow}{b}}) = 0$$

che abbia soluzione per tutte e sole le coppie $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ di interi positivi per cui vale

$$2^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}\,.$$

Due ipotesi temerarie

1. Julia Robinson punta a individuare un'eq. diofantea parametrica

$$D(\,x_1\,,\ldots,\,x_m\,,\;\overset{\overset{\boldsymbol{a}}{\downarrow}}{a}\,,\;\overset{\overset{\boldsymbol{b}}{\downarrow}}{b}\,)\;=\;0$$

che abbia soluzione per tutte e sole le coppie $\boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{b}$ di interi positivi per cui vale

$$2^{\boldsymbol{a}} \;=\; \boldsymbol{b}\,.$$

2. Martin Davis congettura che *ogniqualvolta* un insieme infinito di numeri può venir elencato algoritmicamente, esso sia anche descrivibile tramite un'equazione diofantea parametrica.

Davis, Putnam, Robinson (ca. 1960)

1. riducono l'ipotesi di Davis e, con ciò,

all'ipotesi della Robinson.

Qualsiasi insieme possa venir elencato è descrivibile tramite un'equaz. $\boxed{\text{ESPONENZIALE}}$

Davis, Putnam, Robinson (ca. 1960)

1. riducono l'ipotesi di Davis e, con ciò,
2. l'insolubilità algoritmica del 10º problema di Hilbert

all'ipotesi della Robinson.

. . . Yuri Vladimirovich Matiyasevich, dimostrando vera l'ipotesi della Robinson, completa nel 1970 un risultato che ha dei risvolti *piú intriganti* degli stessi teoremi di Gödel del 1931.

$$
\begin{array}{rcl}
u + w - v - 2 & = & 0 \\
\ell - 2\,v - 2\,a - 1 & = & 0 \\
\ell^2 - \ell\, z - z^2 - 1 & = & 0 \\
g - b\,\ell^2 & = & 0 \\
g^2 - g\,h - h^2 - 1 & = & 0 \\
m - (2\,h + g)\,c - 3 & = & 0 \\
m - f\,\ell - 2 & = & 0 \\
x^2 - m\,x\,y + y^2 - 1 & = & 0 \\
(d-1)\,\ell + u - x - 1 & = & 0 \\
x - v - (2\,h + g)\,(e-1) & = & 0
\end{array}
$$

Egli mostra che questo sistema ha soluzione per quei valori $\begin{array}{cc} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \\ \downarrow & \downarrow \\ u & v \end{array}$ che sono legati dalla relaz.

$$F_{2\,\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v}\ ,$$

dove $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

... Yuri Vladimirovich Matiyasevich, dimostrando vera l'ipotesi della Robinson, completa nel 1970 un risultato che ha dei risvolti *piú intriganti* degli stessi teoremi di Gödel del 1931.

$$
\begin{array}{lcl}
(u + w - v - 2)^2 & + & \\
(\ell - 2\,v - 2\,a - 1)^2 & + & \\
(\ell^2 - \ell\,z - z^2 - 1)^2 & + & \\
(g - b\,\ell^2)^2 & + & \\
(g^2 - g\,h - h^2 - 1)^2 & + & \\
(m - (2\,h + g)\,c - 3)^2 & + & \\
(m - f\,\ell - 2)^2 & + & \\
(x^2 - m\,x\,y + y^2 - 1)^2 & + & \\
((d - 1)\,\ell + u - x - 1)^2 & + & \\
(x - v - (2\,h + g)\,(e - 1))^2 & = & 0
\end{array}
$$

Leonardo Pisano Fibonacci, ca. 1170 – ca. 1250

Henri	POINCARÉ	1854/1912
Giuseppe	PEANO	1858/1932
David	HILBERT	1862/1943

Henri	POINCARÉ	1854/1912
Giuseppe	PEANO	1858/1932
David	**HILBERT**	**1862/1943**
Thoralf	SKOLEM	1887/1963
Heinrich	BEHMANN	1891/1970
Wilhelm F.	ACKERMANN	1896/1962
Carl L.	**SIEGEL**	**1896/1981**
Alfred	**TARSKI**	**1901/1983**

Henri	POINCARÉ	1854/1912
Giuseppe	PEANO	1858/1932
David	**HILBERT**	**1862/1943**
Thoralf	SKOLEM	1887/1963
Heinrich	BEHMANN	1891/1970
Wilhelm F.	ACKERMANN	1896/1962
Carl L.	**SIEGEL**	**1896/1981**
Emil	POST	1897/1954
Alfred	**TARSKI**	**1901/1983**
Alonzo	CHURCH	1903/1955
Kurt	**GÖDEL**	**1906/1978**
J. Barkley	ROSSER	1907/1989
Alan M.	**TURING**	**1912/1954**

Henri	POINCARÉ	1854/1912
Giuseppe	PEANO	1858/1932
David	**HILBERT**	**1862/1943**
Thoralf	SKOLEM	1887/1963
Heinrich	BEHMANN	1891/1970
Wilhelm F.	ACKERMANN	1896/1962
Carl L.	**SIEGEL**	**1896/1981**
Emil	POST	1897/1954
Alfred	**TARSKI**	**1901/1983**
Alonzo	CHURCH	1903/1955
Kurt	**GÖDEL**	**1906/1978**
J. Barkley	ROSSER	1907/1989
Alan M.	**TURING**	**1912/1954**
Julia	**BOWMAN ROBINSON**	**1919/1985**
Hilary	**PUTNAM**	**1926/2016**
Martin D.	**DAVIS**	**1928/**

Henri	POINCARÉ	1854/1912
Giuseppe	PEANO	1858/1932
David	**HILBERT**	**1862/1943**
Thoralf	SKOLEM	1887/1963
Heinrich	BEHMANN	1891/1970
Wilhelm F.	ACKERMANN	1896/1962
Carl L.	**SIEGEL**	**1896/1981**
Emil	POST	1897/1954
Alfred	**TARSKI**	**1901/1983**
Alonzo	CHURCH	1903/1955
Kurt	**GÖDEL**	**1906/1978**
J. Barkley	ROSSER	1907/1989
Alan M.	**TURING**	**1912/1954**
Julia	**BOWMAN ROBINSON**	**1919/1985**
Hilary	**PUTNAM**	**1926/2016**
Martin D.	**DAVIS**	**1928/**
Yuri V.	**MATIYASEVICH**	**1947/**

1. $(a-4)\cdot(a-5)\cdot(a-9)=0$
2. $(x+1)^2-(a-b)^2=0$
3. $a-3\cdot(10-x)=0$
4. $a-x^2\cdot y=0$
5. $a=2\cdot x\,;\quad a=2\cdot x+1$
6. $a\cdot x=b\,;\;\;(a\cdot x+y+1-b)^2+(a-y-z-2)^2=0$
7. $\left(a^2+b^2-c^2\right)^2+(a-x-1)^2+(b-y-1)^2=0\,;$ $a\cdot b\cdot\left[(x+1)^2-(a^2+b^2-c^2)^2\right]=0$
8. $a=(x+2)\cdot(y+2)$
9. $a=\left[2\cdot(x+1)+1\right]\cdot y$
10. $2\cdot a=x^2+x$
11. $a=y+z\;\&\;b=(2\cdot x+1)\cdot y$
12. $b^2-4\cdot a\cdot c-y=0$

È vero che x^2+x+41 è numero primo per $x=0,1,\ldots,39$ (mentre uguaglia 41^2 per $x=40$). Però questi valori non sono primi consecutivi: ad es., dopo il quarto di essi, che è 53, manca il 59 e dopo il quinto, che è 61, manca il 67 .