Verso l’infinito… e oltre!

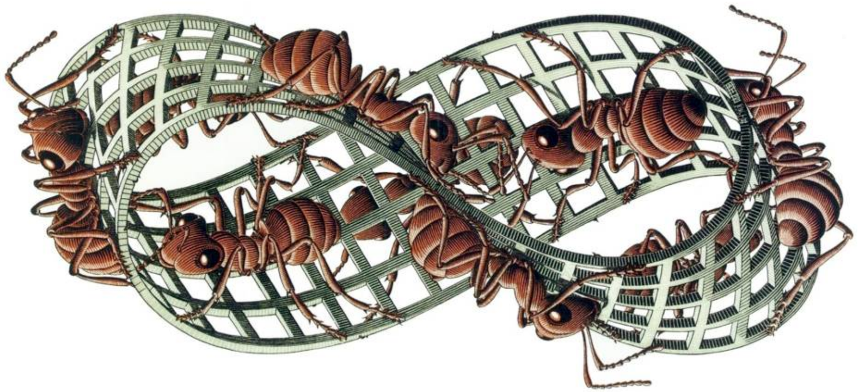
Hermann Weil (1885 - 1955)

Hermann Weil (1885 - 1955)

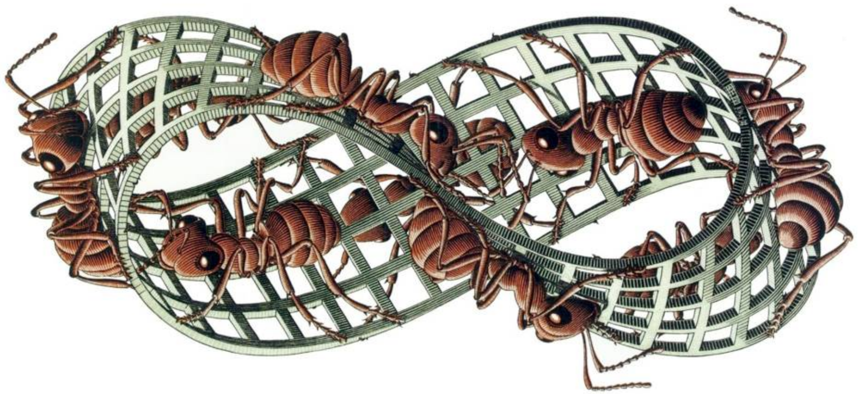
"Mathematics is the science of the infinite"

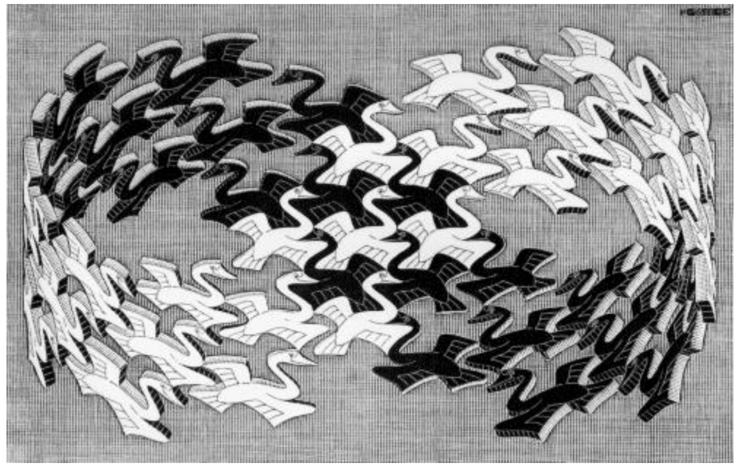
Infinito o… infiniti?

Infinito o… infiniti?

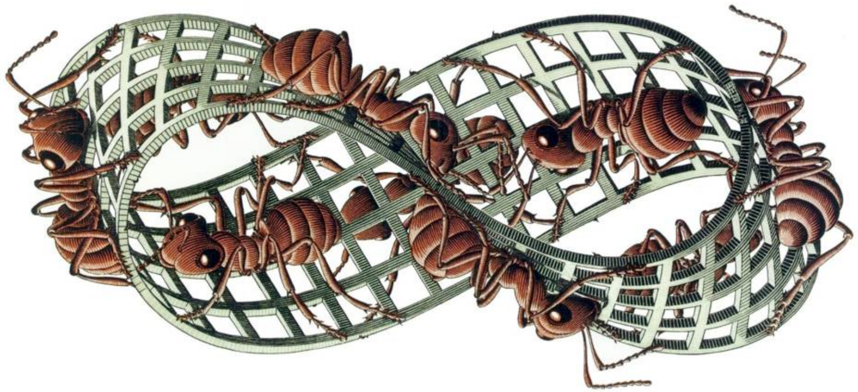


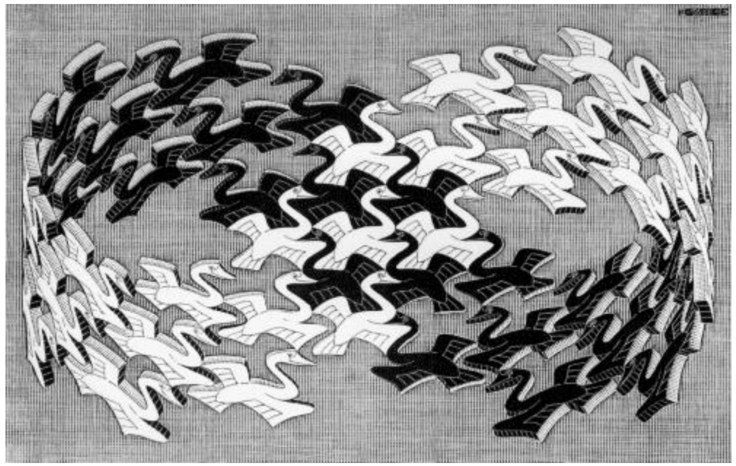
Infinito o… infiniti?

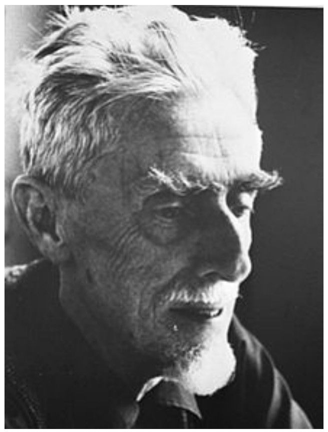




Infinito o… infiniti?







Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972)

John Wallis (1616 - 1703)

John Wallis (1616 - 1703)

- Ha introdotto il simbolo:

$$\infty$$

John Wallis (1616 - 1703)

- Ha scoperto una formula meravigliosa:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

John Wallis (1616 - 1703)

- Aveva un’idea “insolita” dei numeri negativi:
  li pensava come fossero “oltre l’infinito”

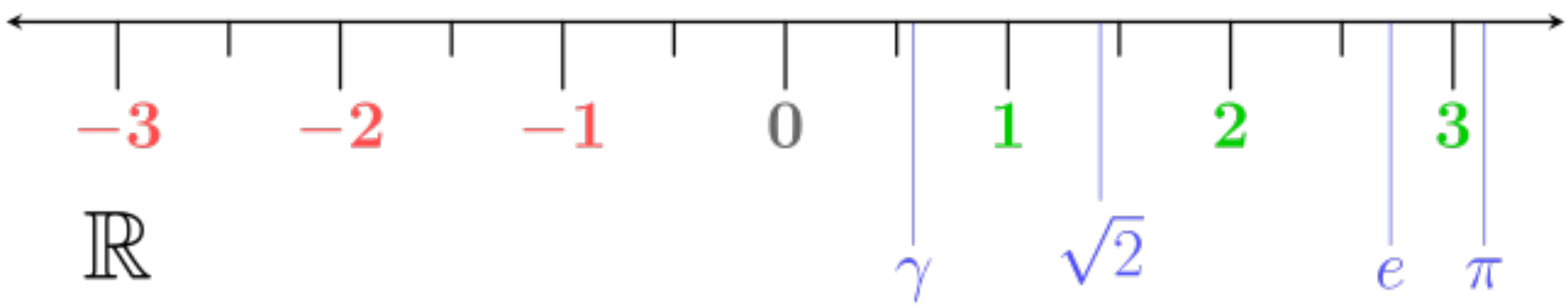
John Wallis (1616 - 1703)

- Aveva un’idea “insolita” dei numeri negativi:
  li pensava come fossero “oltre l’infinito”

- Era pazzo?

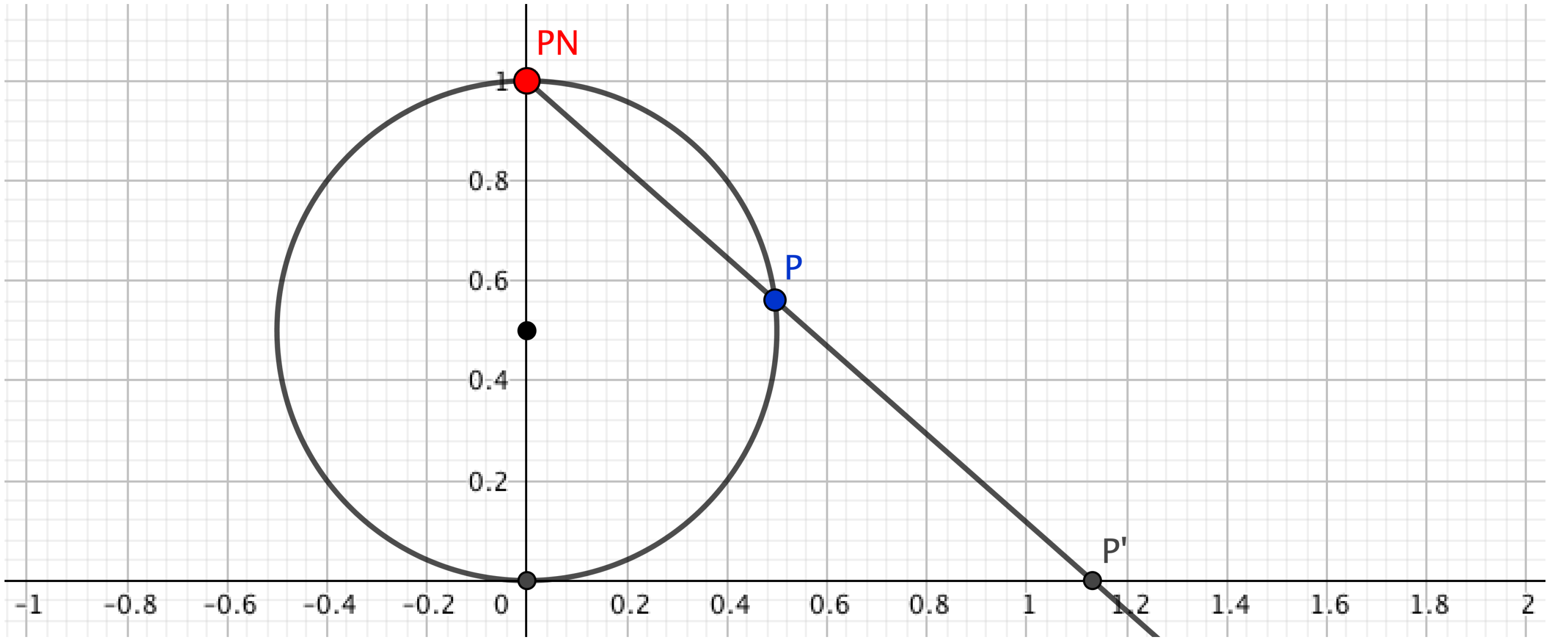
Rappresentazione dei numeri reali

- La “retta reale”



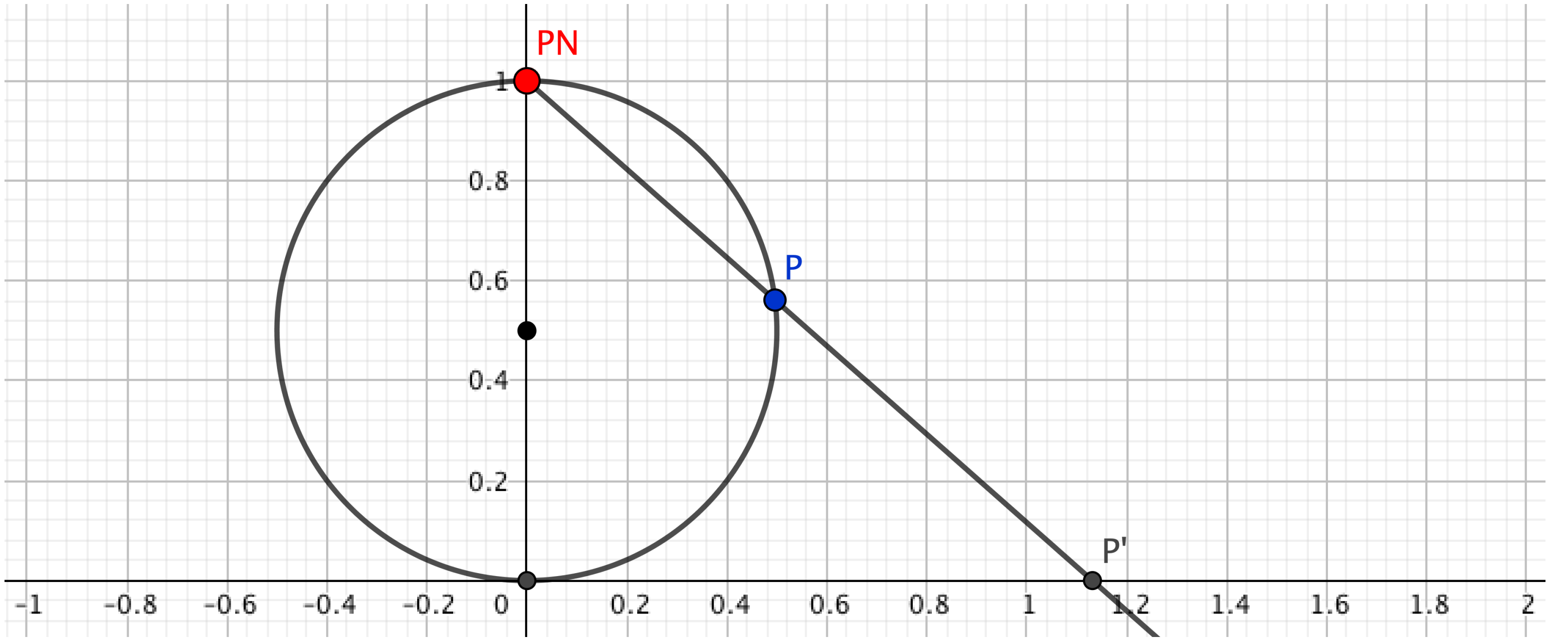
Rappresentazione dei numeri reali

- La “circonferenza reale” (o quasi)



Rappresentazione dei numeri reali

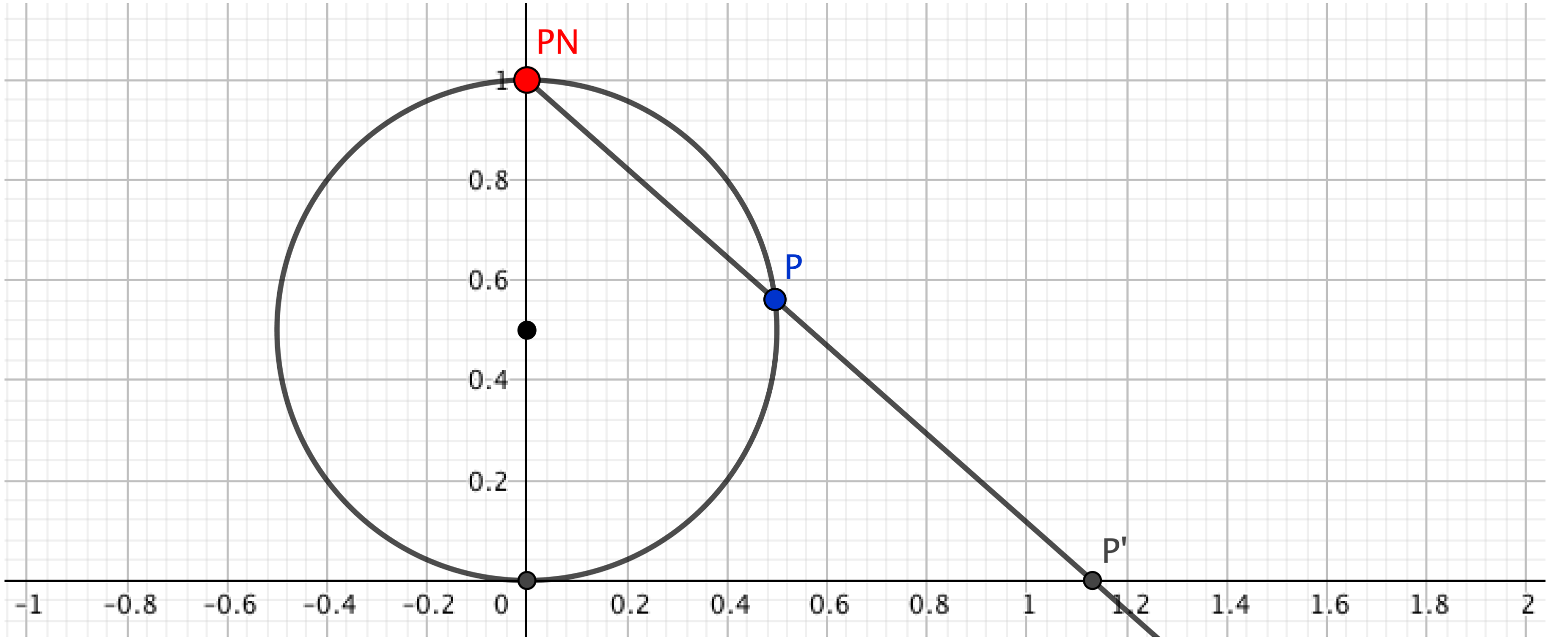
- La "circonferenza reale" (o quasi)



Devo toglierci il Polo Nord, giusto?

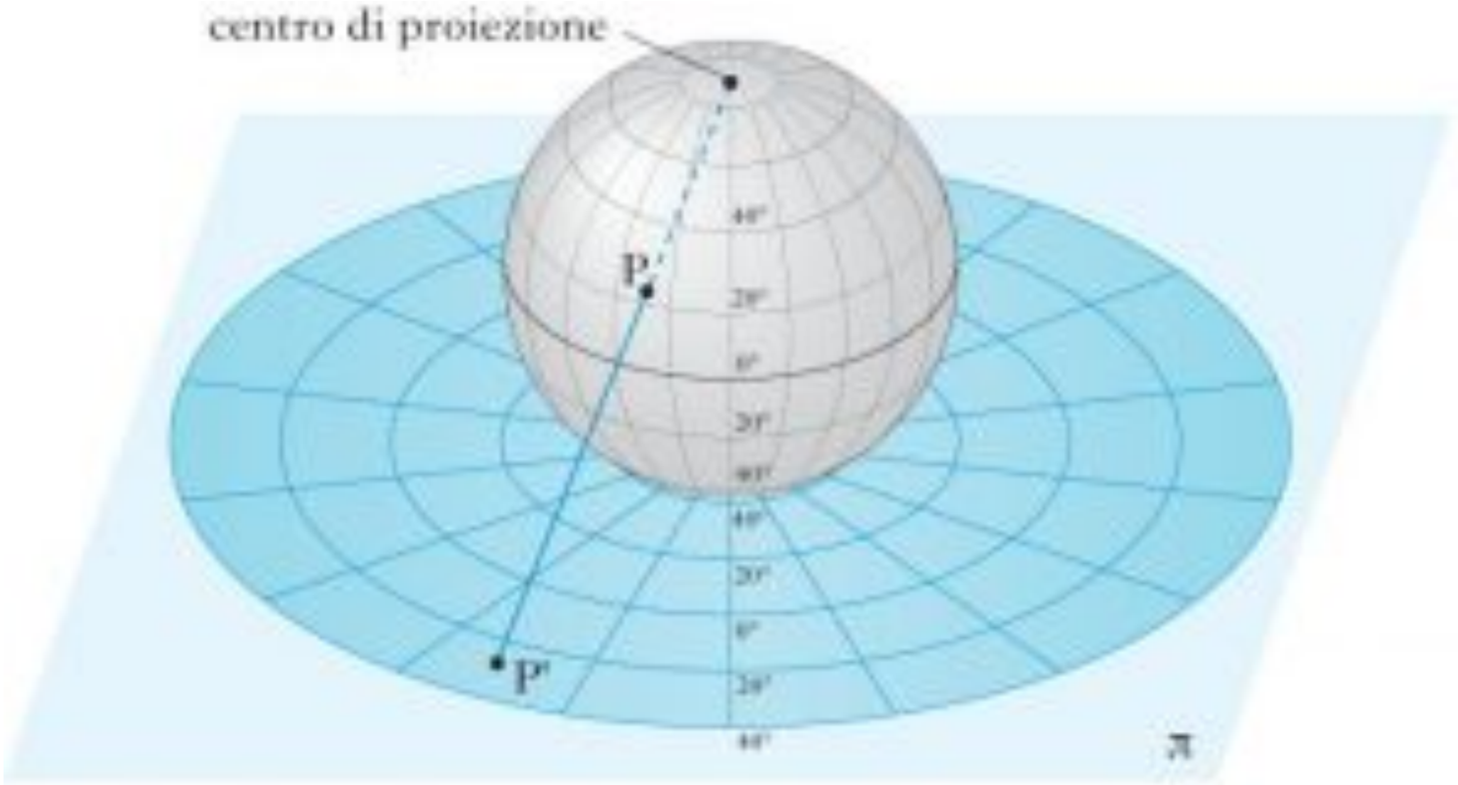
Rappresentazione dei numeri reali

- La “circonferenza reale” (o quasi)



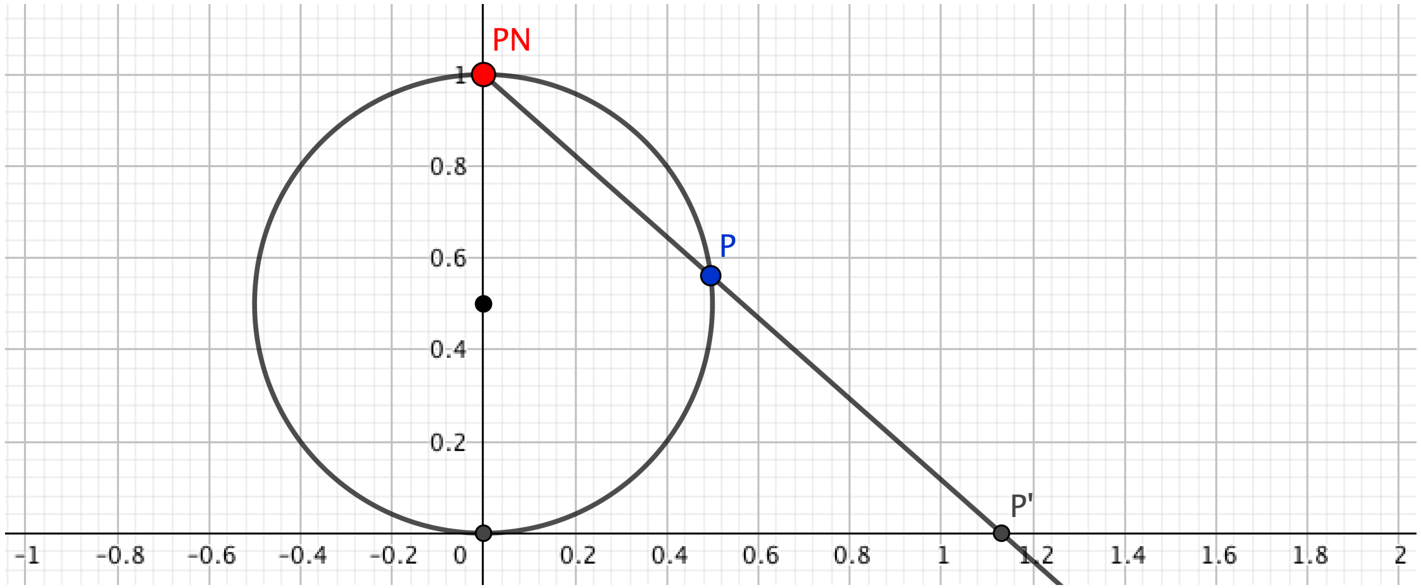
Devo toglierci il Polo Nord, giusto? Cosa rappresenta il Polo Nord?

In dimensione superiore



Più mi allontano, più il punto sulla sfera si avvicina al Polo Nord.
Possiamo quindi pensare che il Polo Nord corrisponda al “limite”, che indichiamo con “**∞**” .

Tornando alla “circonferenza reale”…

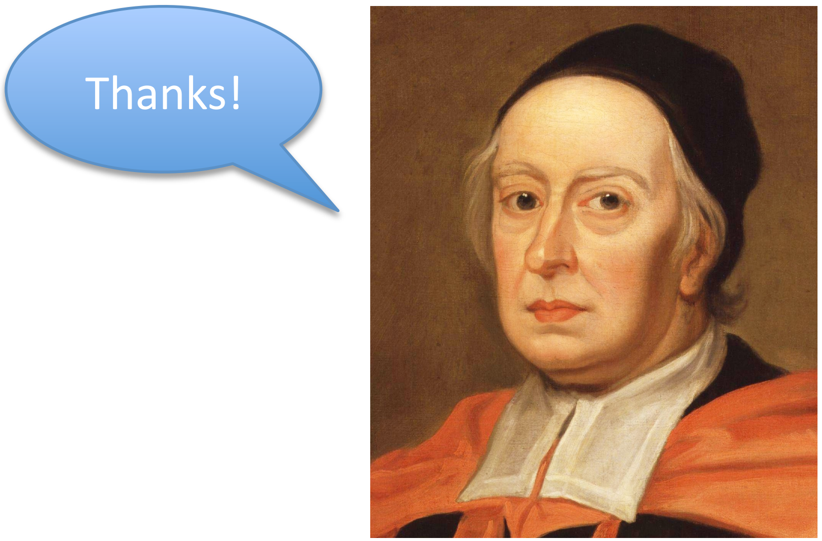


Se sposto P lungo la circonferenza in senso antiorario,
partendo dal Polo Sud (che corrisponde a **0**),
trovo tutti i numeri positivi, ma…
passando oltre al Polo Nord (che corrisponde a **∞**),
ecco che, “oltre l’infinito”, trovo i numeri negativi!

John Wallis (1616 - 1703)

Un uomo di grande fantasia

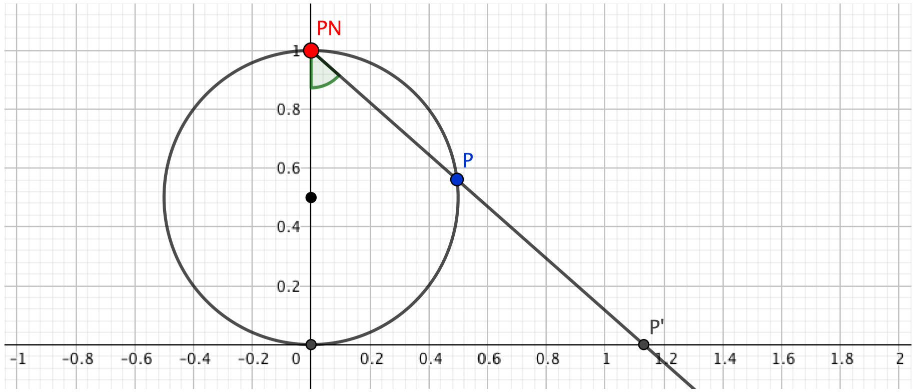
John Wallis (1616 - 1703)

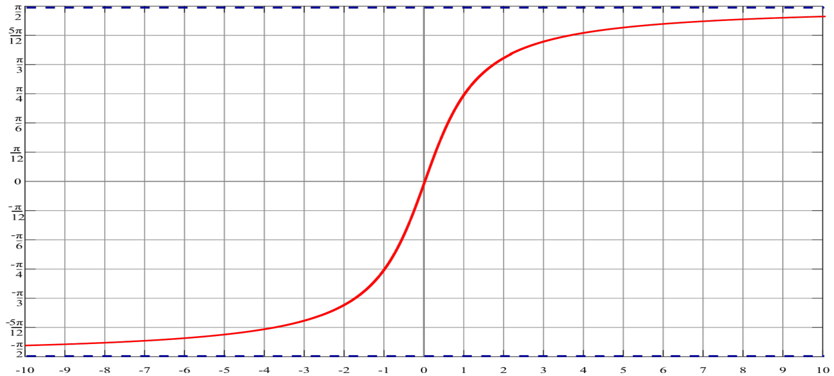


Un uomo di grande fantasia

Rappresentazione dei numeri reali

- Meglio un “intervallo reale” ?



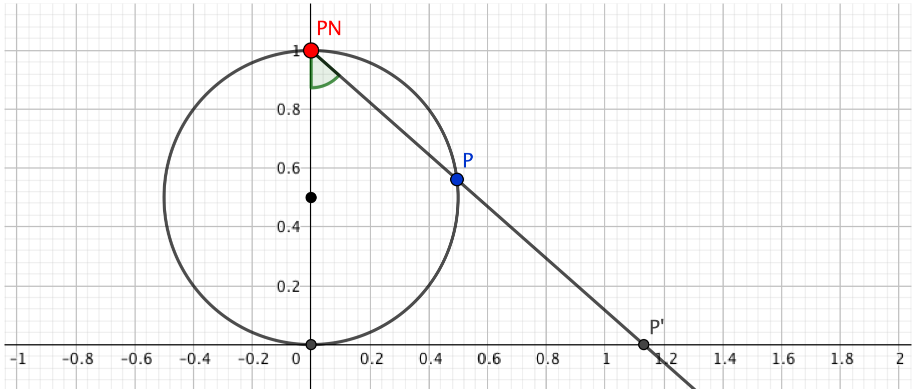


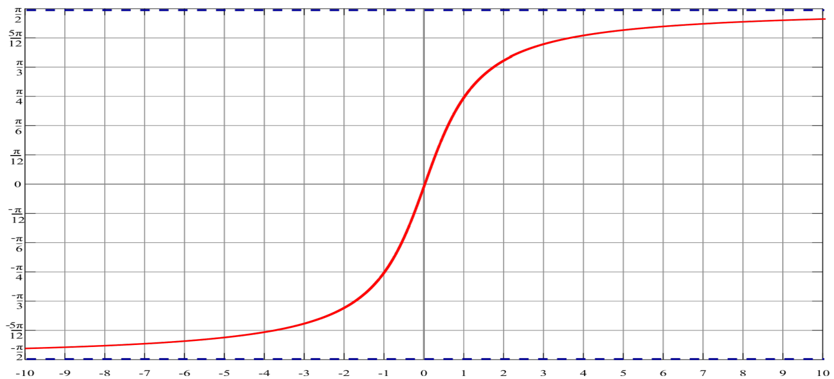
La funzione arcotangente…

… mi trasforma R nell’intervallo $]-\pi/2 , \pi/2[$ …

Rappresentazione dei numeri reali

- Meglio un “intervallo reale” ?

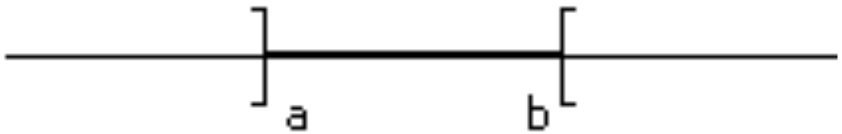




La funzione arcotangente…

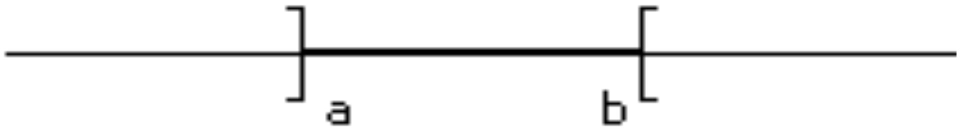
… mi trasforma R nell’intervallo]-π/2 , π/2[…

ma potrei fare lo stesso con un qualsiasi intervallo]a,b[



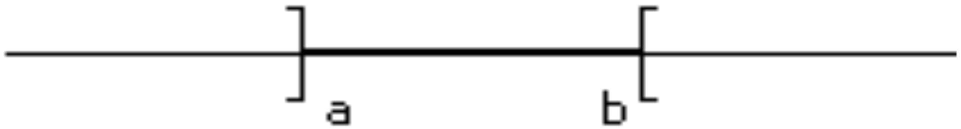
Rappresentazione dei numeri reali

- Cosa rappresentano a e b ?



Rappresentazione dei numeri reali

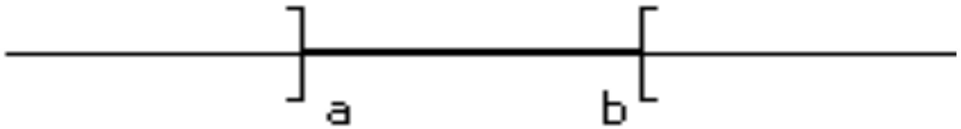
- Cosa rappresentano a e b ?



Posso pensarli come -∞ e +∞ ?

Rappresentazione dei numeri reali

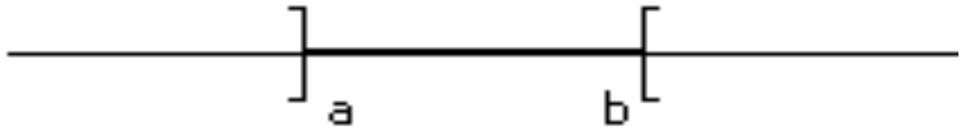
- Cosa rappresentano a e b ?



Posso pensarli come $-\infty$ e $+\infty$? Perché no?

Rappresentazione dei numeri reali

- Cosa rappresentano a e b ?



Posso pensarli come -∞ e +∞ ? Perché no?

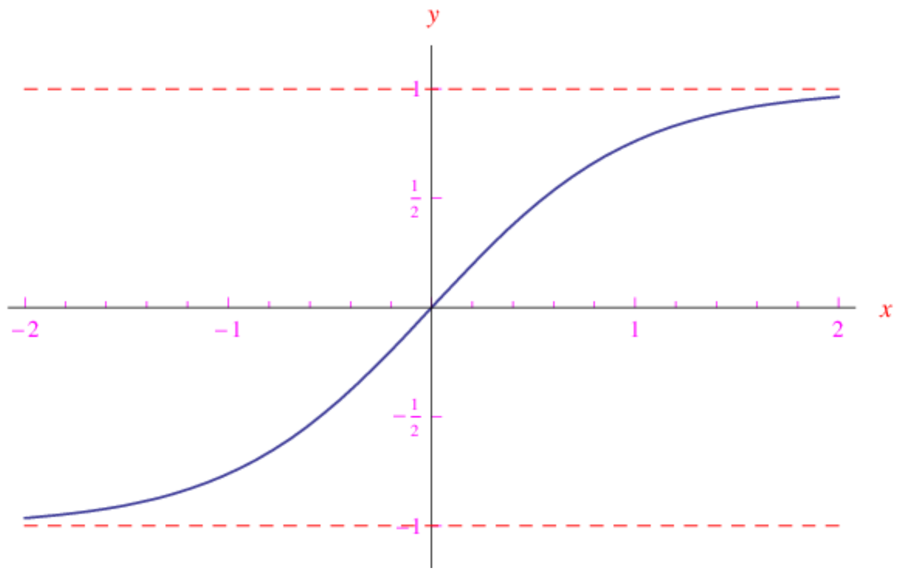
Cosa c'è "oltre"?

Una curiosità

Se invece della funzione arcotangente prendiamo la funzione

$$F(x) = c \tanh(x)$$

trasformiamo R nell'intervallo]-c,c[.



Una curiosità

Se $v_1 = F(x_1)$ e $v_2 = F(x_2)$, con

$$F(x) = c \tanh(x) = c \, \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, ,$$

definiamo l'operazione $v_1 \oplus v_2 = F(x_1 + x_2)$.

Allora vale la formula

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Una curiosità

Se $v_1 = F(x_1)$ e $v_2 = F(x_2)$, con

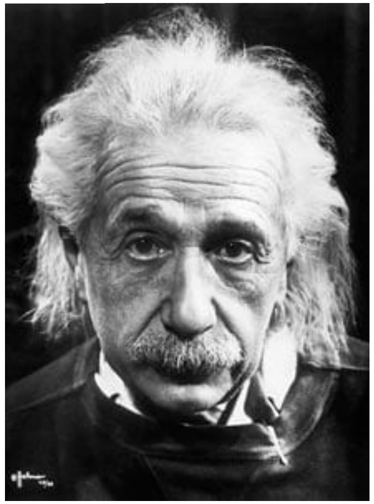
$$F(x) = c\,\tanh(x) = c\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,,$$

definiamo l'operazione $v_1 \oplus v_2 = F(x_1 + x_2)$.

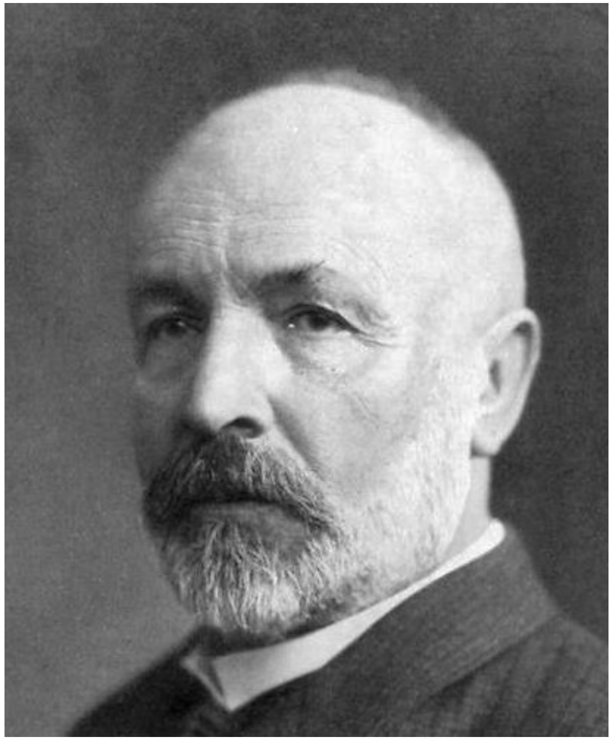
Allora vale la formula

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

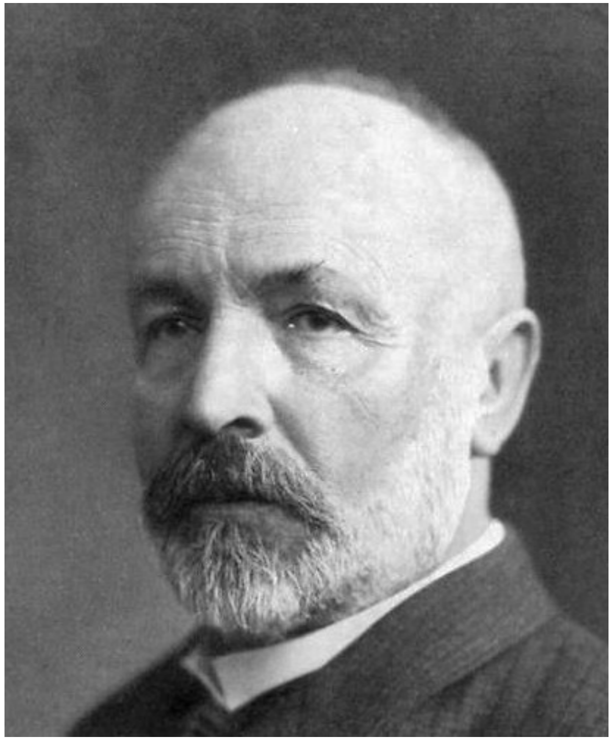
Interessante!



Georg Cantor (1845 - 1918)

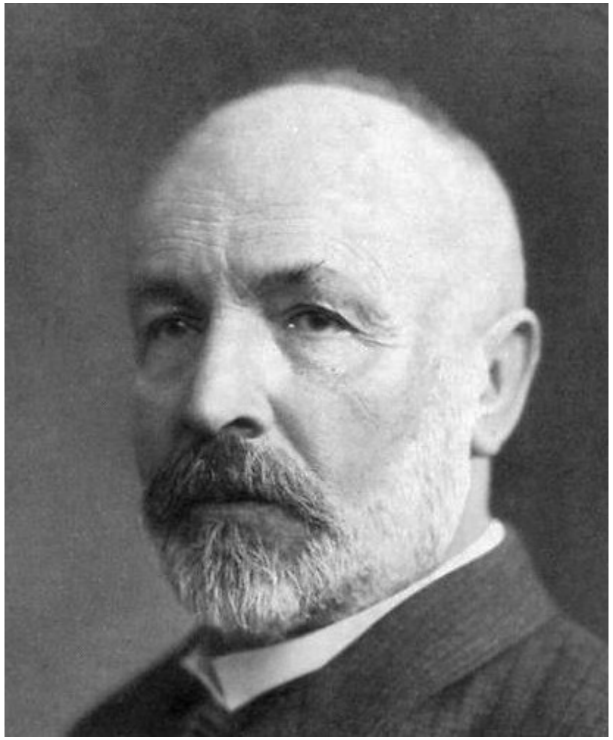


Georg Cantor (1845 - 1918)



L’uomo che ha osato “sfidare” l’infinito

Georg Cantor (1845 - 1918)



Consideriamo gli “insiemi infiniti” N, Z, Q, R, R^2, R^3, …

Ecco gli insiemi

$$\mathbb{N} = \{\,0\,,1\,,2\,,3\,,\,\dots\,\} \qquad \text{(numeri naturali)}$$

$$\mathbb{Z} = \{\,\dots\,,-3,-2,-1,0\,,1\,,2\,,3\,,\,\dots\,\} \qquad \text{(interi)}$$

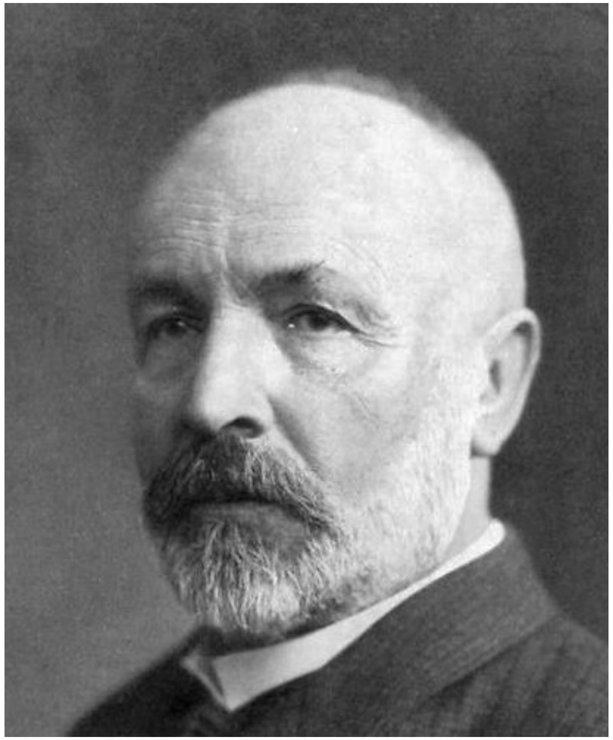
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\,, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \qquad \text{(razionali)}$$

$$\mathbb{R} = \{\,\text{``numeri reali''}\,\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}\,, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{(piano cartesiano)}$$

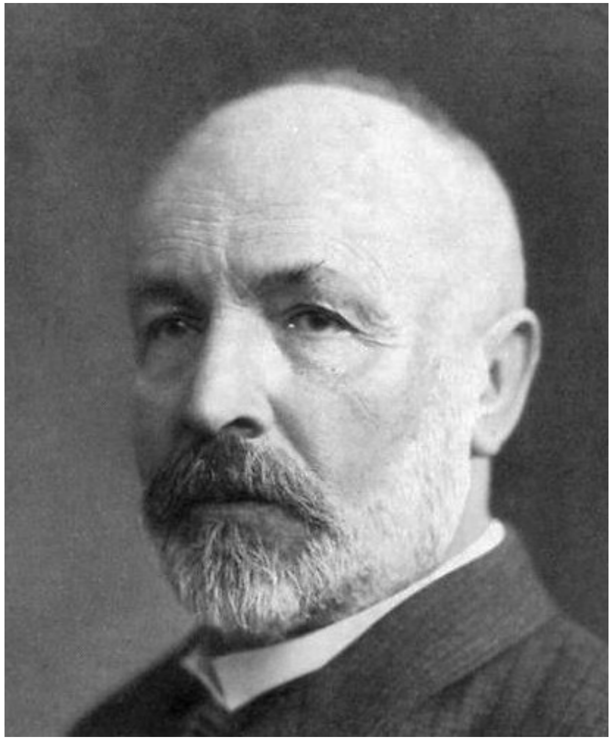
$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}\,, y \in \mathbb{R}\,, z \in \mathbb{R}\} \quad \text{(spazio)}$$

Georg Cantor (1845 - 1918)



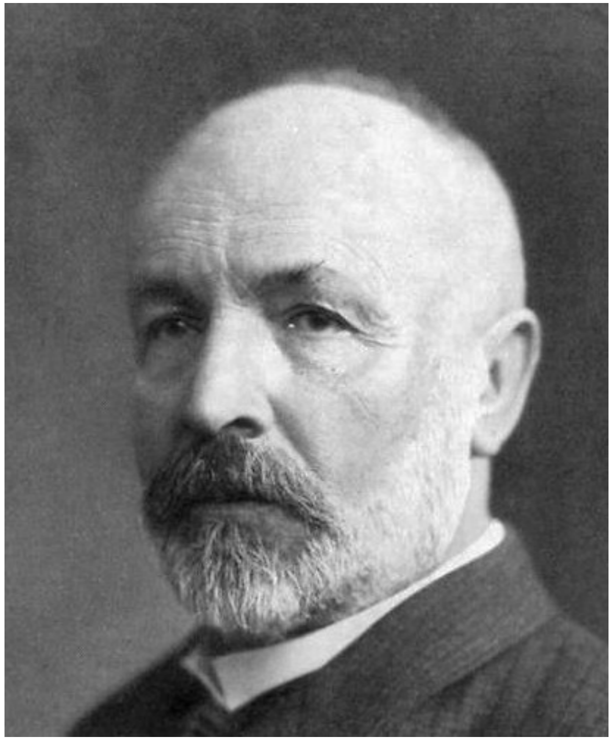
C'è una corrispondenza biunivoca tra N e Z,
così come tra Z e Q … ma non tra Q e R

Georg Cantor (1845 - 1918)



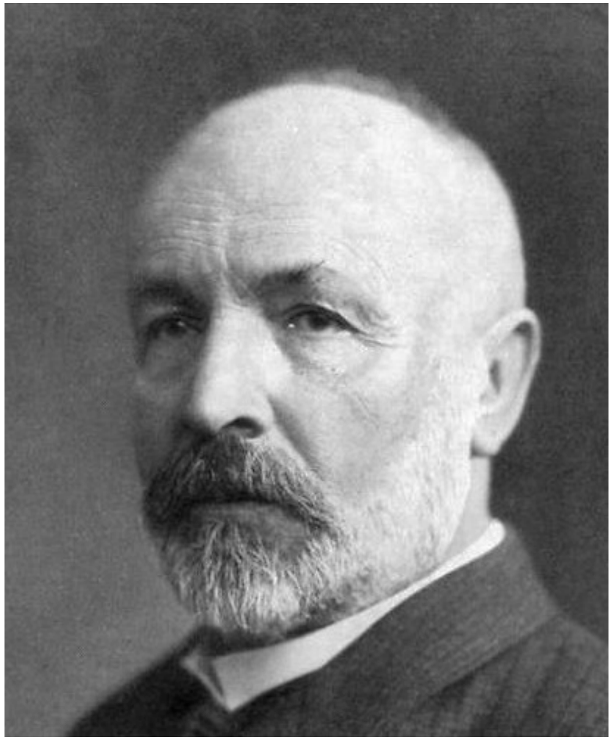
Quindi, N, Z e Q sono infiniti dello stesso tipo. Diremo che sono “numerabili”. Ma R non è numerabile!

Georg Cantor (1845 - 1918)



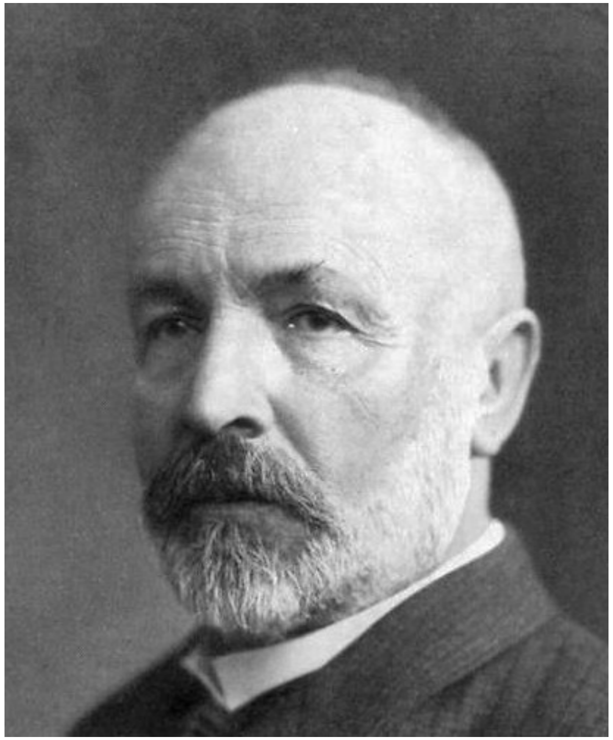
Ci sono infiniti di tipo diverso!

Georg Cantor (1845 - 1918)



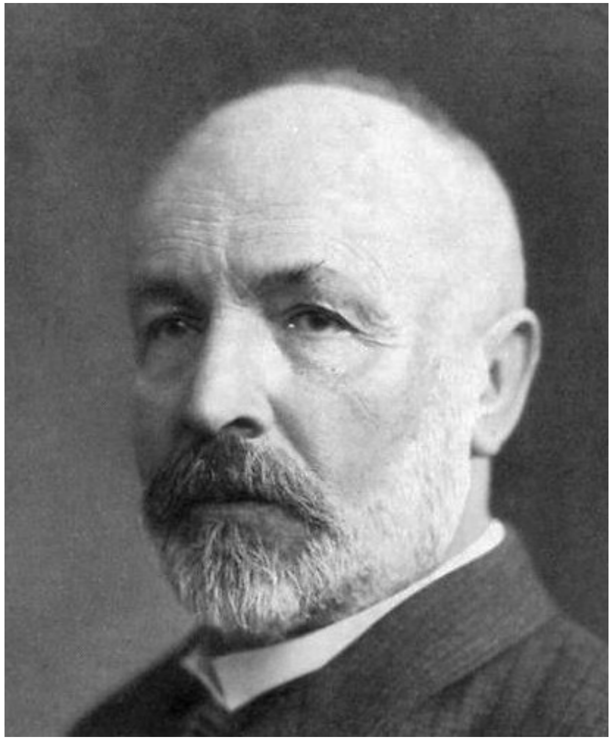
Inoltre, c’è una corrispondenza biunivoca tra R e R^2,
così come tra R^2 e R^3 …

Georg Cantor (1845 - 1918)



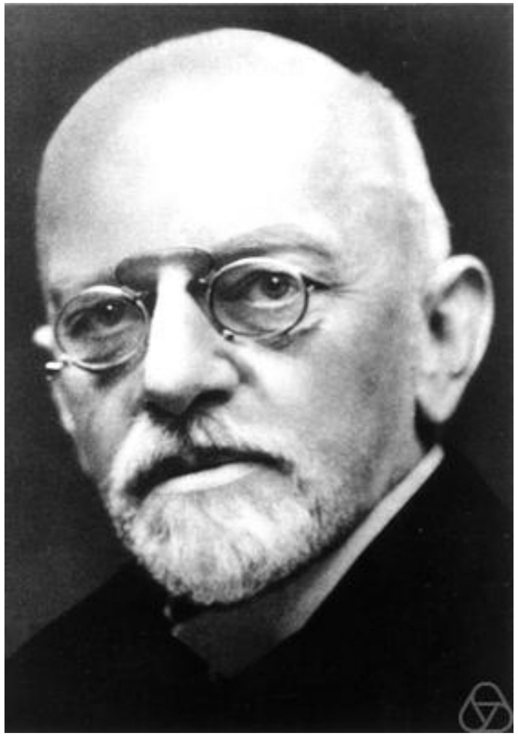
$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}\,, \quad \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}\,, \quad \mathbb{Q} \not\sim \mathbb{R}\,, \quad \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2\,, \quad \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}^3$$

Georg Cantor (1845 - 1918)

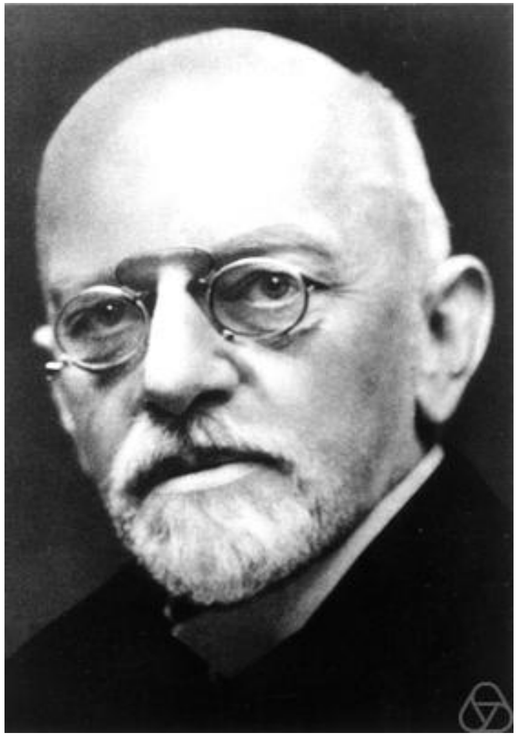


Insiemi di dimensione diversa sono infiniti dello stesso tipo! *"Lo vedo, ma non lo credo…"*

David Hilbert (1862 - 1943)

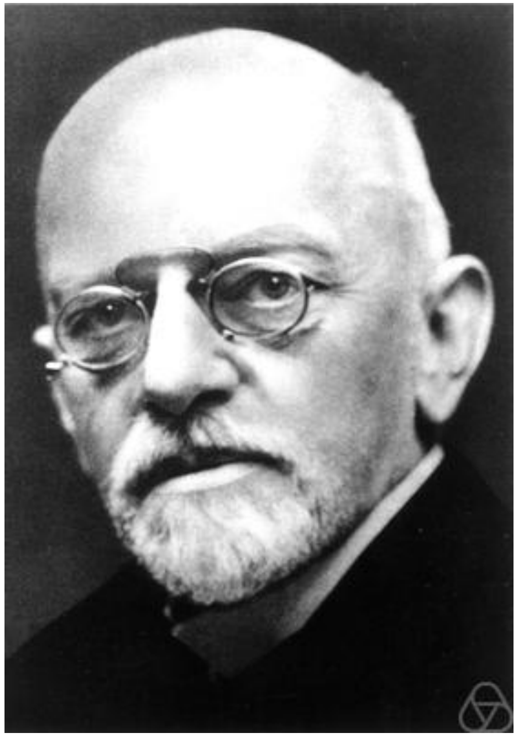


David Hilbert (1862 - 1943)



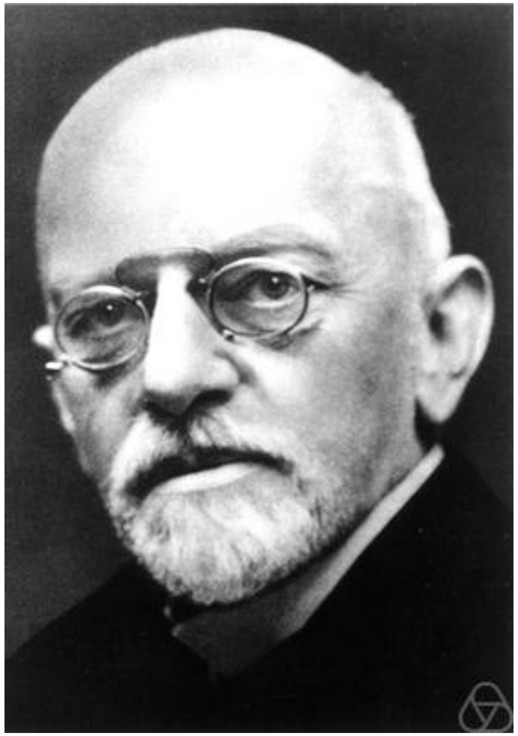
"Nessuno riuscirà a cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi"

David Hilbert (1862 - 1943)



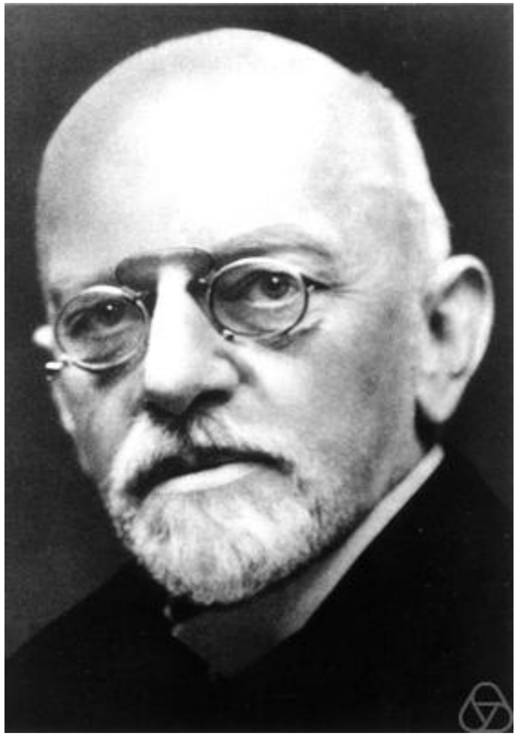
Hilbert aveva dei problemi

David Hilbert (1862 - 1943)



A Parigi (8 agosto 1900) Hilbert parlò dei suoi problemi

David Hilbert (1862 - 1943)



Sono 23 problemi, molti dei quali ancora aperti

Primo problema di Hilbert

Sia S un sottoinsieme di R contenente N

Ci sono due soli casi possibili:

1. S è in corrispondenza biunivoca con N
2. S è in corrispondenza biunivoca con R

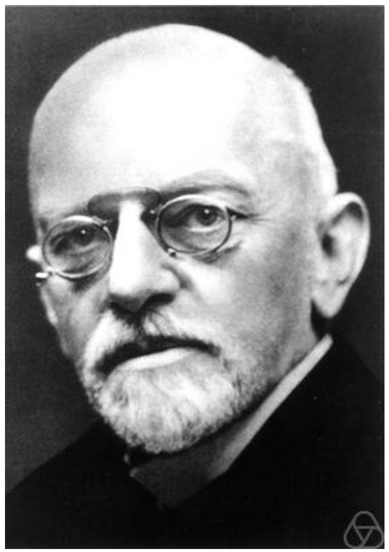
Primo problema di Hilbert

Sia S un sottoinsieme di R contenente N

Ci sono due soli casi possibili:

1. S è in corrispondenza biunivoca con N
2. S è in corrispondenza biunivoca con R

Provateci voi!



È un problema di ~~Hilbert~~ Cantor!

Sia S un sottoinsieme di R contenente N

Ci sono due soli casi possibili:

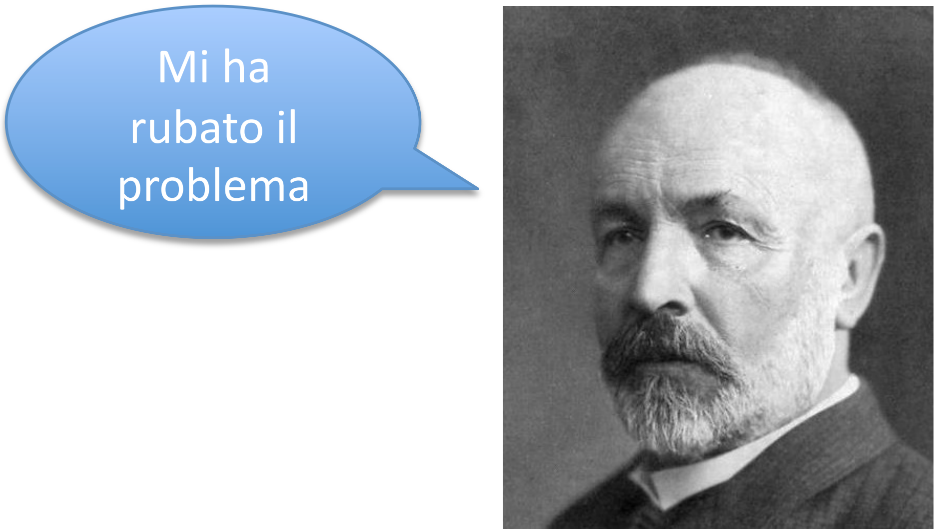
1. S è in corrispondenza biunivoca con N
2. S è in corrispondenza biunivoca con R

È un problema di ~~Hilbert~~ Cantor!

Sia S un sottoinsieme di R contenente N

Ci sono due soli casi possibili:

1. S è in corrispondenza biunivoca con N
2. S è in corrispondenza biunivoca con R



Primo problema di Hilbert

- Kurt Gödel (1906 - 1978)

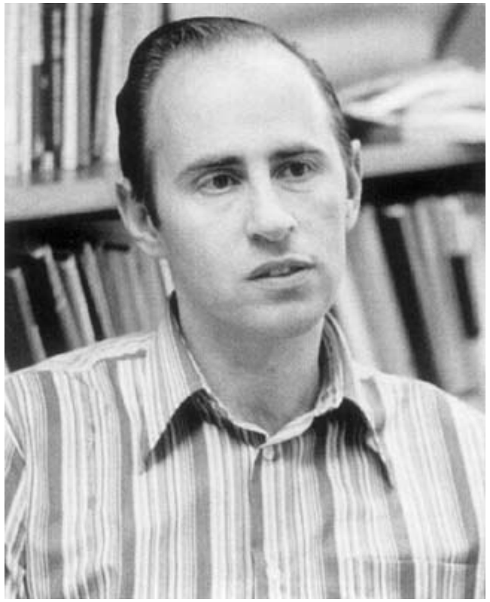
Primo problema di Hilbert

- Kurt Gödel (1906 - 1978)

nel 1940, ha dimostrato che la proposizione è coerente con gli assiomi ZFC

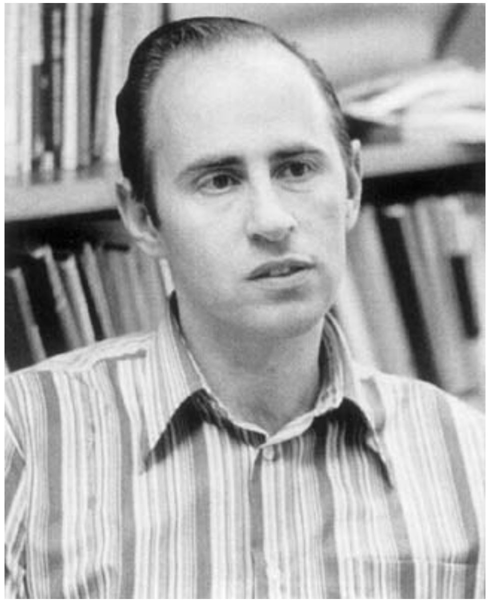
Primo problema di Hilbert

- Paul Cohen (1934 – 2007)



Primo problema di Hilbert

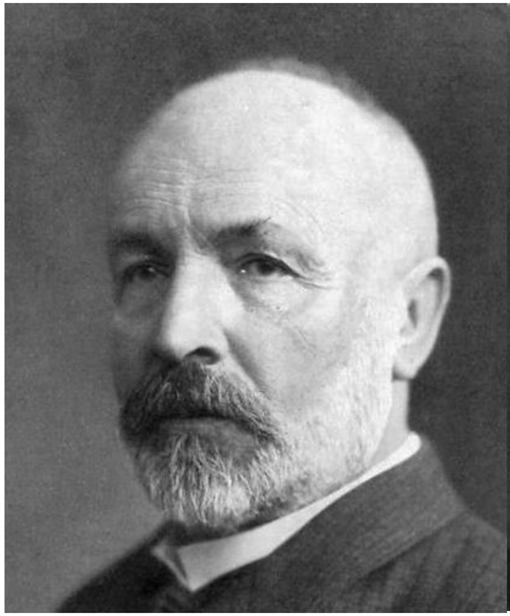
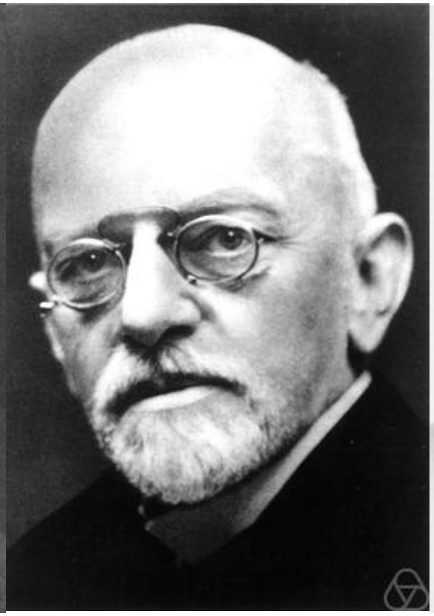
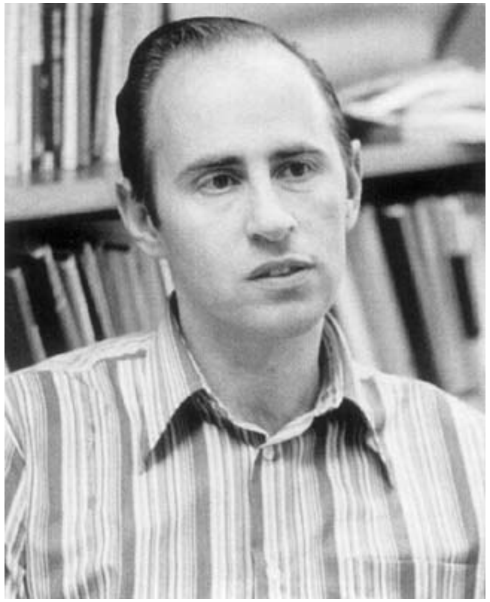
- Paul Cohen (1934 – 2007)



nel 1963, ha dimostrato che anche la negazione della stessa proposizione è coerente con gli assiomi ZFC

Primo problema di Hilbert

Possiamo considerarlo risolto?



Hermann Weil (1885 - 1955)

"*La domanda riguardo ai fondamenti profondi e al significato ultimo della matematica resta aperta; non sappiamo lungo quale direzione troverà la sua soluzione finale e neppure se ci si debba aspettare una risposta finale oggettiva.”*

Paradossi dell'infinito

- Quando si ha a che fare con insiemi infiniti, ci si confronta spesso con situazioni inusuali…

Paradossi dell'infinito

- Quando si ha a che fare con insiemi infiniti, ci si confronta spesso con situazioni inusuali… situazioni che la nostra intuizione non riesce a gestire, che ci sembrano impossibili, assurde.

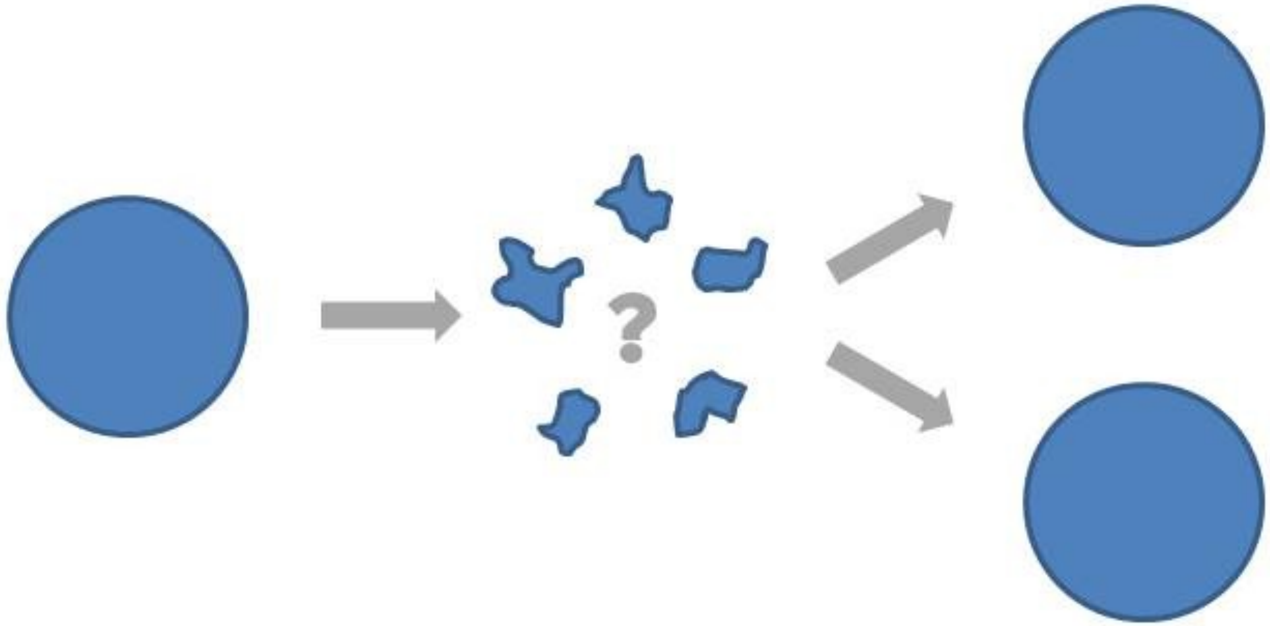
Paradossi dell'infinito

- Quando si ha a che fare con insiemi infiniti, ci si confronta spesso con situazioni inusuali… situazioni che la nostra intuizione non riesce a gestire, che ci sembrano impossibili, assurde.
- Si tratta dei cosiddetti "paradossi".

Paradossi dell'infinito

- Quando si ha a che fare con insiemi infiniti, ci si confronta spesso con situazioni inusuali… situazioni che la nostra intuizione non riesce a gestire, che ci sembrano impossibili, assurde.
- Si tratta dei cosiddetti "paradossi".
- Tra tutti questi ne spicca uno, un teorema, forse il più incredibile dei teoremi di tutta la matematica: il "paradosso di Banach-Tarski".

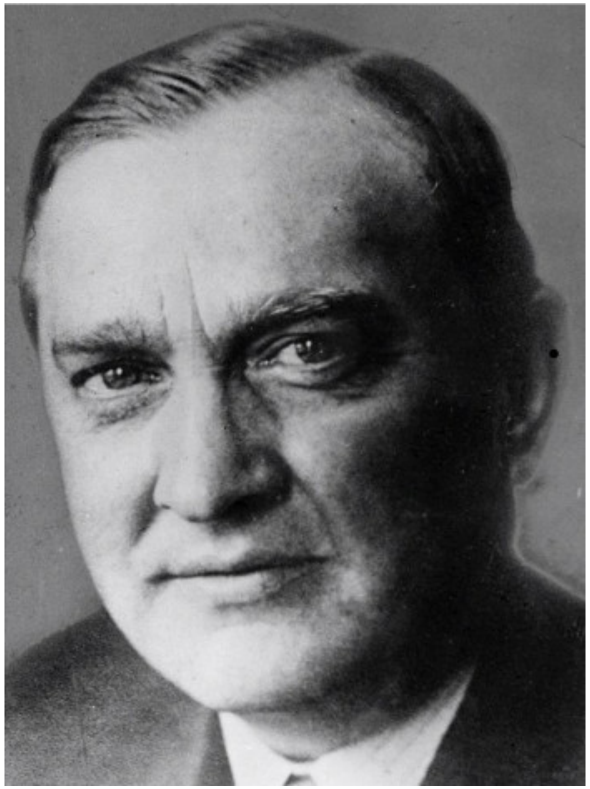
Il paradosso di Banach - Tarski



Problema: si può duplicare una palla?

Il paradosso di Banach - Tarski

- Stefan Banach (1892 -1945)



Il paradosso di Banach - Tarski

- Alfred Tarski (1901 -1983)

Il paradosso di Banach - Tarski

Due insiemi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono *equi-scomponibili* se

$$\mathcal{A} = A_1 \cup \cdots \cup A_n\,, \qquad \mathcal{B} = B_1 \cup \cdots \cup B_n\,,$$

con $A_1, \ldots, A_n$ a due a due disgiunti, $B_1, \ldots, B_n$ anch'essi a due a due disgiunti, e tali che e

ogni B_i è una roto-traslazione di A_i .

Il paradosso di Banach - Tarski

Due insiemi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono *equi-scomponibili* se

$$\mathcal{A} = A_1 \cup \cdots \cup A_n \,, \qquad \mathcal{B} = B_1 \cup \cdots \cup B_n \,,$$

con $A_1, \ldots, A_n$ a due a due disgiunti, $B_1, \ldots, B_n$ anch'essi a due a due disgiunti, e tali che e

ogni B_i è una roto-traslazione di A_i .

Scriveremo così: $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

Il paradosso di Banach - Tarski

Sia

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

la palla unitaria, e sia $\mathcal{P}_T$ una traslazione di $\mathcal{P}$, tale che

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_T = \emptyset\,.$$

Il paradosso di Banach - Tarski

Sia

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

la palla unitaria, e sia $\mathcal{P}_T$ una traslazione di $\mathcal{P}$, tale che

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_T = \emptyset\,.$$

Teorema (di Banach–Tarski): $\mathcal{P} \sim \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_T$.

Il paradosso di Banach - Tarski

Sia

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

la palla unitaria, e sia $\mathcal{P}_T$ una traslazione di $\mathcal{P}$, tale che

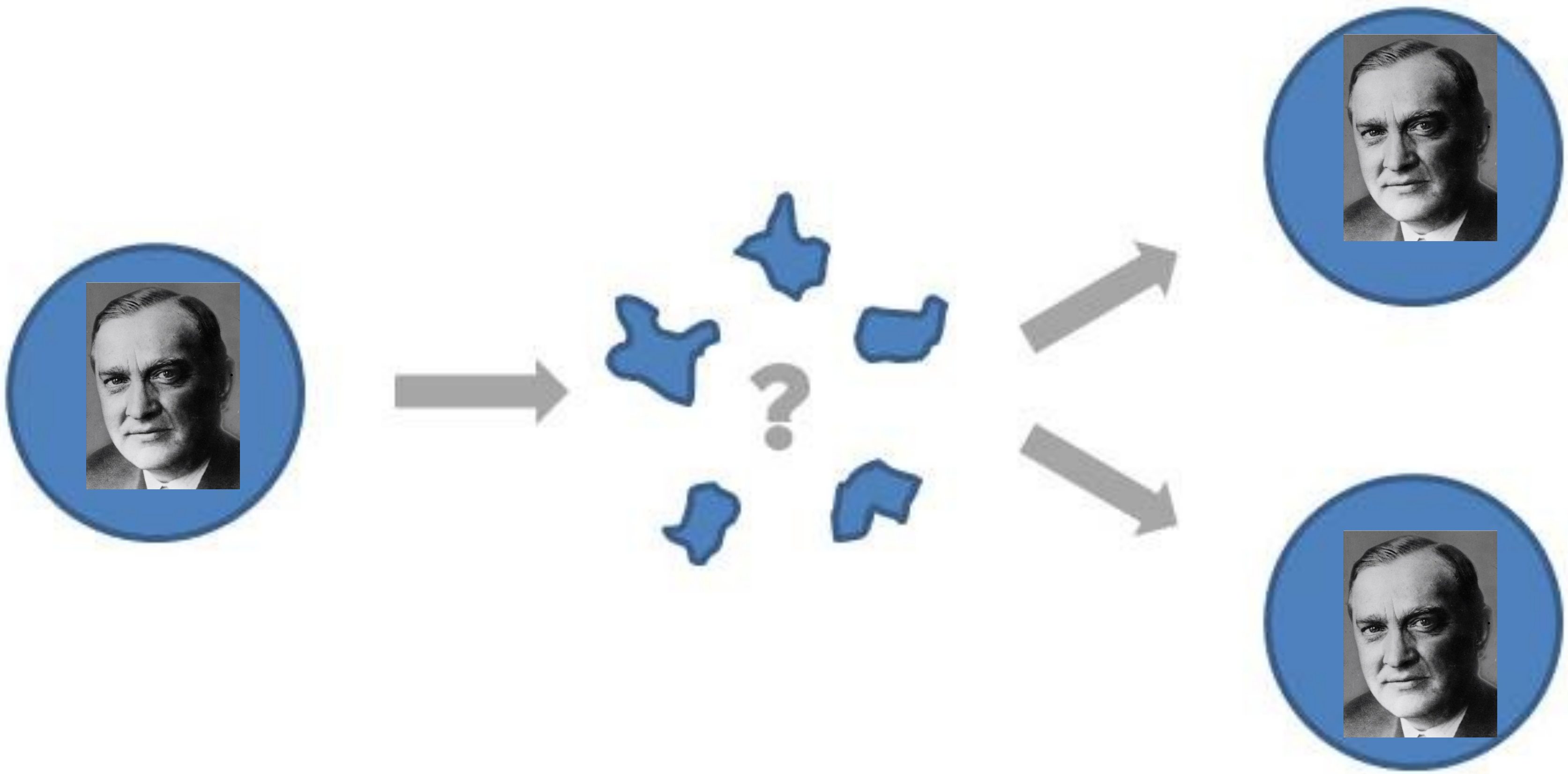
$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_T = \emptyset\,.$$

<u>Teorema</u> (di Banach–Tarski): $\mathcal{P} \sim \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_T$.

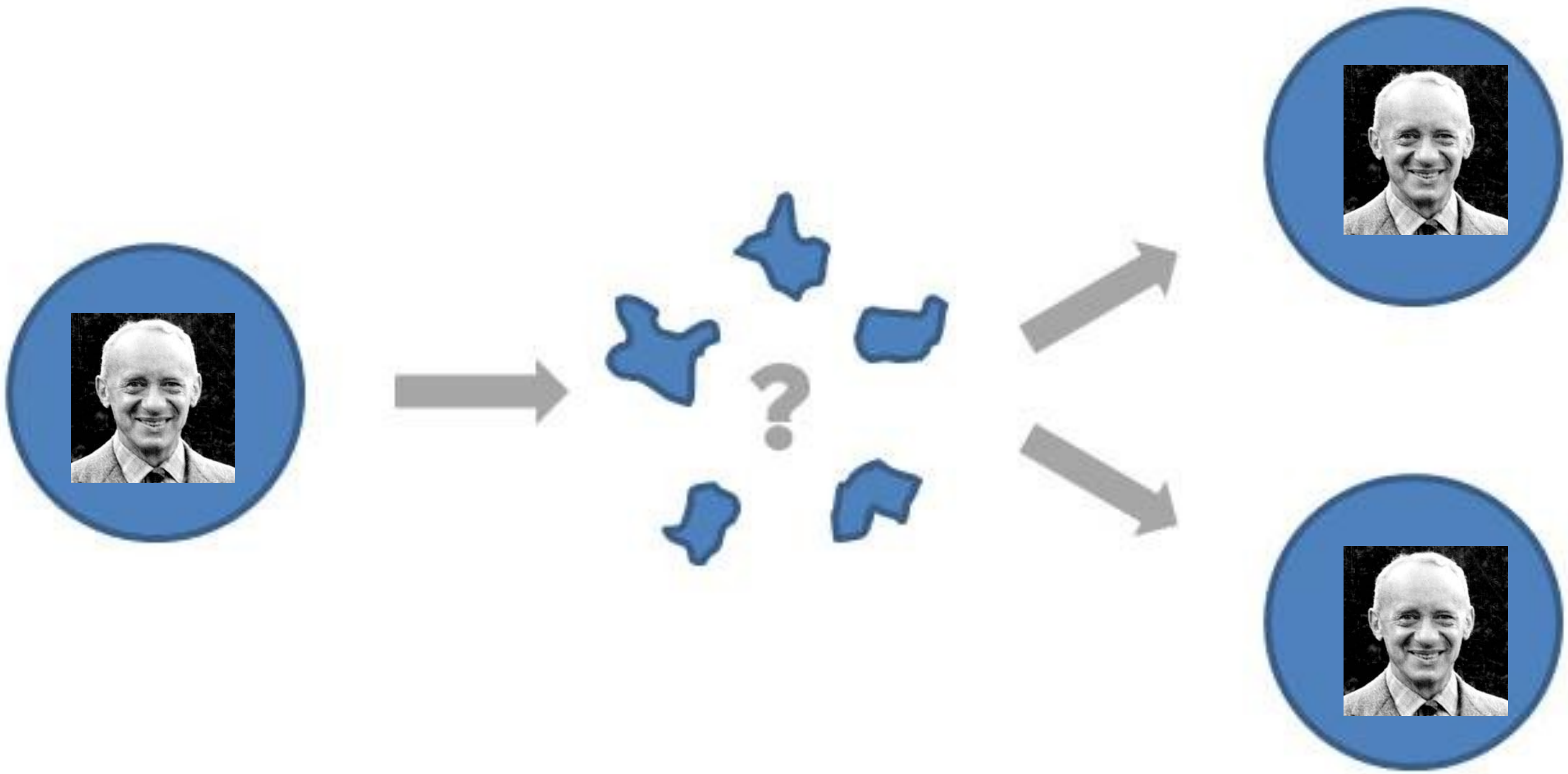
Come è possibile?

Si può fare!!!

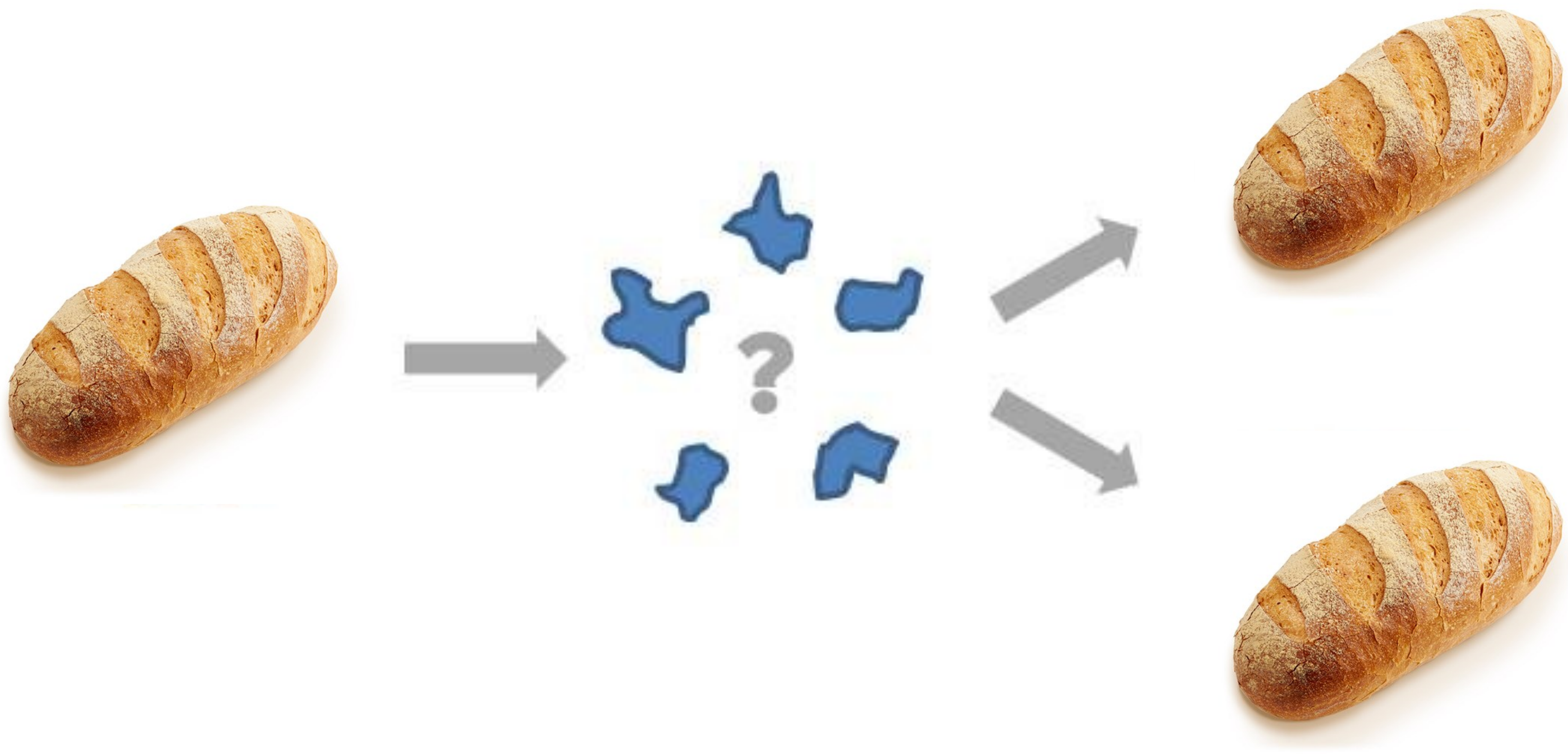
Il paradosso di Banach - Tarski



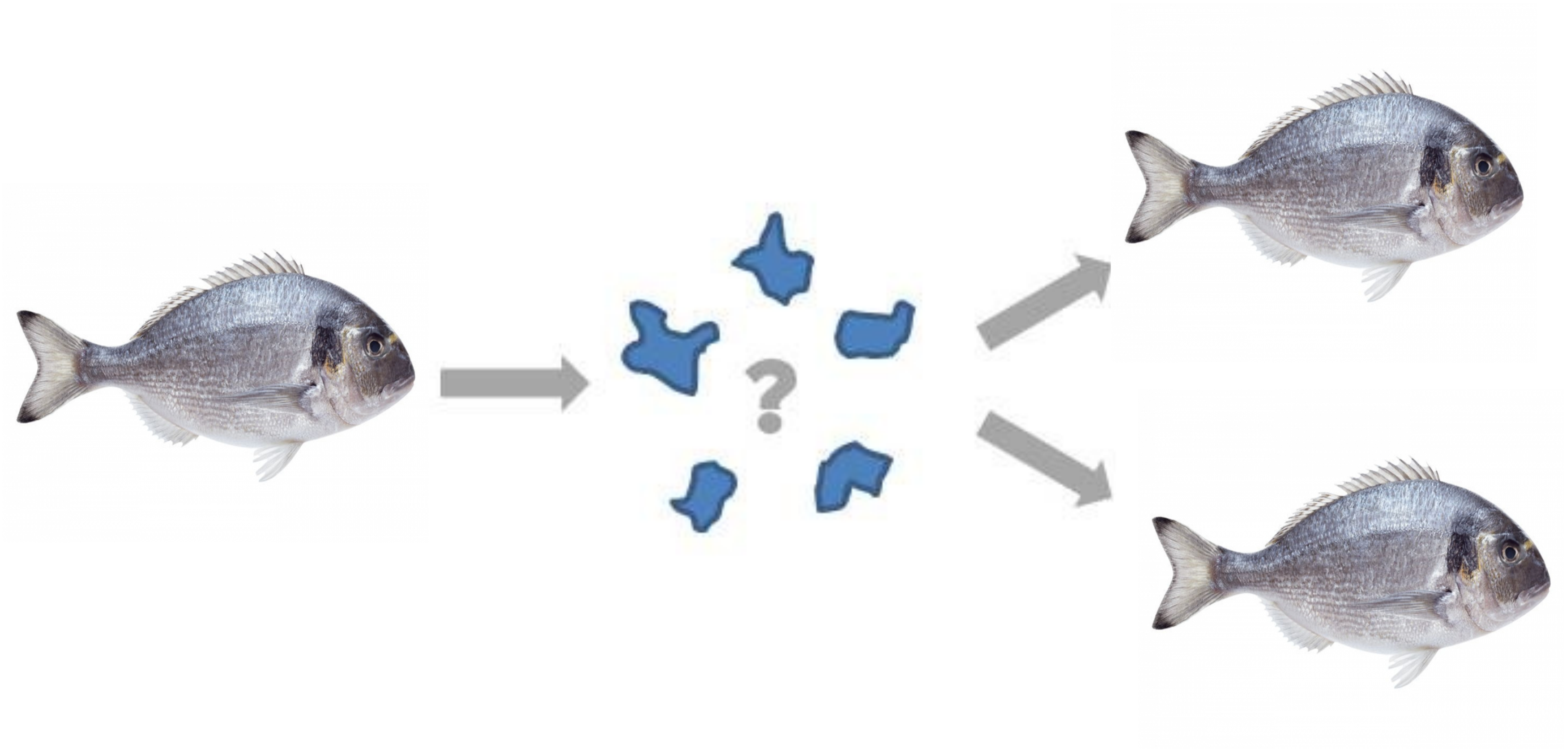
Il paradosso di Banach - Tarski



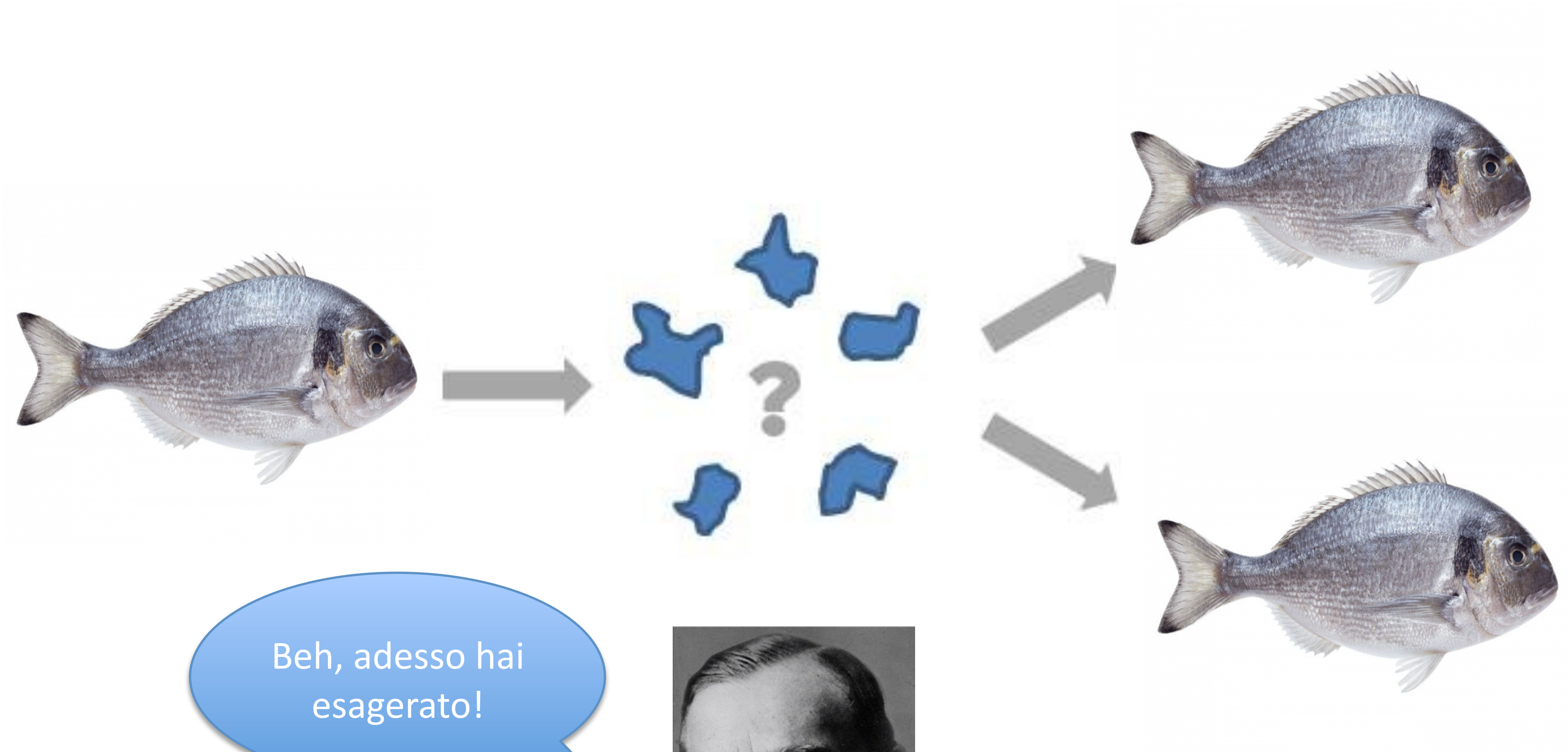
Il paradosso di Banach - Tarski



Il paradosso di Banach - Tarski



Il paradosso di Banach - Tarski



Buzz Lightyear (1995 -)

“Verso l’infinito… e oltre!”

Buzz Lightyear (1995 -)

È convinto di saper volare …

Buzz Lightyear (1995 -)

… e come ogni vero matematico …

Buzz Lightyear (1995 -)

può volare!

Verso l’infinito… e oltre!

Verso l’infinito… e oltre!