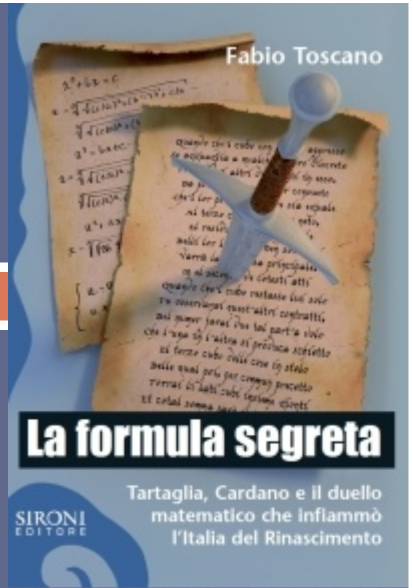
TERZI GRADI E DISFIDE MATEMATICHE

CIRCOLO MATEMATICO - TRIESTE

mezzette@units.it

Emilia Mezzetti – Dipartimento di Matematica e Geoscienze - Università di Trieste

Storia della risoluzione delle equazioni di 3° grado



- Protagonisti: Niccolò Tartaglia, Gerolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Scipione Dal Ferro, e altri personaggi minori
- La scena: l'Italia settentrionale del '500: Brescia, Verona, Venezia, Milano, Bologna
- Lo spunto: il libro di Fabio Toscano "La formula segreta", Sironi

Il maestro d'abaco

- Niccolò Tartaglia nacque a Brescia nel 1499
- Fu sfregiato durante il sacco di Brescia nel 1512 → balbuzie
- Diventò Maestro d'abaco a Verona

- Abaco: insieme delle operazioni contabili e delle problematiche connesse alla pratica mercantile
- Scuole d'abaco in Italia a partire dal XIII secolo
- Liber abaci - Fibonacci

Il maestro d'abaco

Gli Algoritmisti contro gli Abacisti,
dalla Margarita philosophica
di Gregor Reisch (1503).

- I libri d'abaco si compongono di molti problemi particolari – non descrivono un metodo generale
- Tendono a formare una mentalità mnemonico-analogica, non logico-deduttiva
- Tartaglia si afferma, molti lo consultano per risolvere problemi, **altri maestri d'abaco lo sfidano**

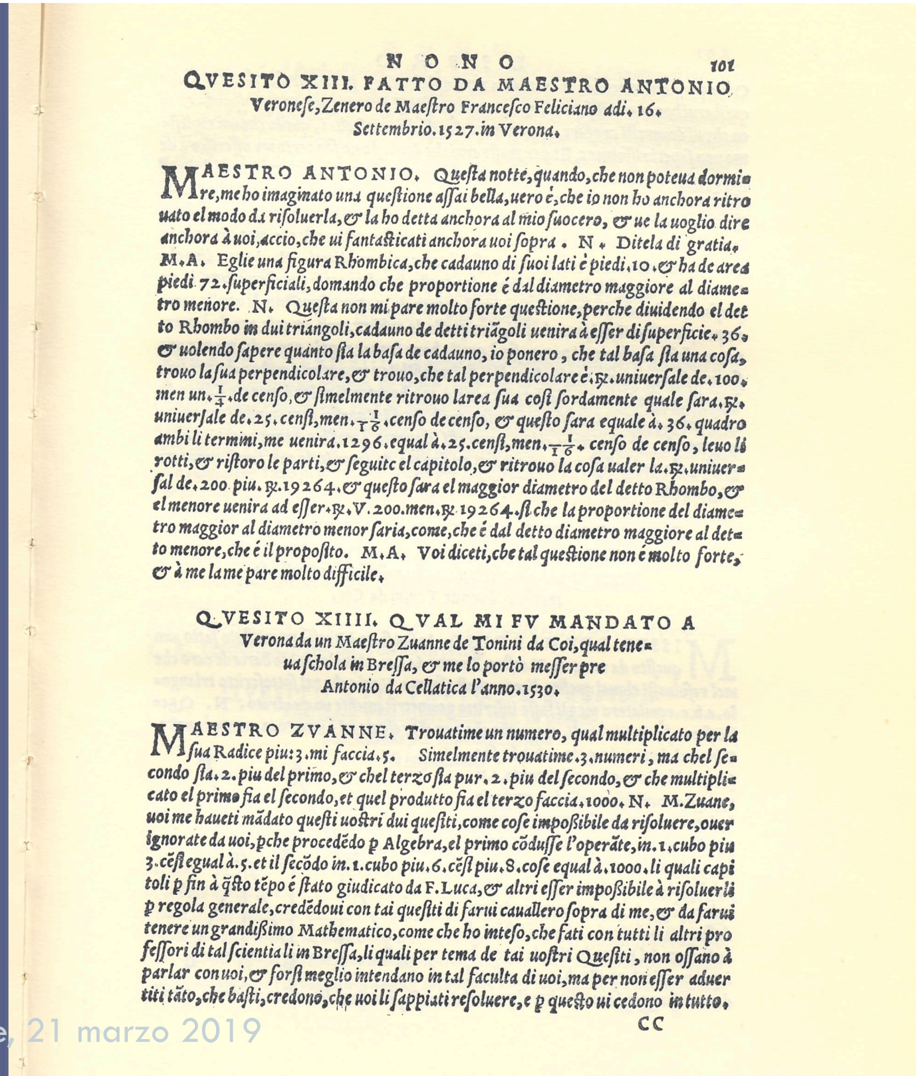
Le disfide matematiche

- Erano molto diffuse con regole consolidate
- Lo sfidante inviava alcuni problemi, lo sfidato doveva cercare di risolverli entro un termine prestabilito, proponendo allo sfidato ulteriori problemi
- In caso di esito contrastato, pubblico dibattito
- REGOLA IMPORTANTE: Nessuno dei duellanti poteva avanzare problemi che egli stesso non fosse capace di risolvere

La sfida di Zuanne de Tonini da Coi

Nel 1530 Zuanne de Tonini da Coi sfida Tartaglia con due quesiti:

- *Trovatime un numero qual moltiplicato per la sua radice più 3 mi faccia 5.*
- *Similemente, trovatime tre numeri, ma che ‘l secondo sia 2 più del primo et che ‘l terzo sia pur 2 più del secondo, e che multiplicato el primo fia el secondo, et quel produtto fia el terzo faccia 1000.*



QVESITO XIII. FATTO DA MAESTRO ANTONIO Veroneſe, Zenero de Maeſtro Franceſco Feliciano adi. 16. Settembrio. 1527. in Verona.

MAESTRO ANTONIO. Queſta notte, quando, che non poteua dormire, me ho imaginato una queſtione aſſai bella, uero é, che io non ho anchora ritrouato el modo da riſoluerla, & la ho detta anchora al mio ſuocero, & ue la uoglio dire anchora à uoi, accio, che ui fantaſticati anchora uoi ſopra. N. Ditela di gratia. M. A. Eglie una figura Rhombica, che cadauno di ſuoi lati è piedi. 10. & ha de area piedi 72. ſuperficiali, domando che proportione é dal diametro maggiore al diametro menore. N. Queſta non mi pare molto forte queſtione, perche diuidendo el detto Rhombo in dui triangoli, cadauno de detti triãgoli uenira à eſſer di ſuperficie. 36. & uolendo ſapere quanto ſia la baſa de cadauno, io ponero, che tal baſa ſia una coſa, trouo la ſua perpendicolare, & trouo, che tal perpendicolare è. ℞. uniuerſale de. 100. men un. $\frac{1}{4}$. de cenſo, & ſimelmente ritrouo larea ſua coſi ſordamente quale ſara. ℞. uniuerſale de. 25. cenſi, men. $\frac{1}{16}$. cenſo de cenſo, & queſto ſara equale à. 36. quadro ambi li termini, me uenira. 1296. equal à. 25. cenſi, men. $\frac{1}{16}$. cenſo de cenſo, leuo li rotti, & riſtoro le parti, & ſeguite el capitolo, & ritrouo la coſa ualer la. ℞. uniuerſal de. 200 piu. ℞. 19264. & queſto ſara el maggior diametro del detto Rhombo, & el menore uenira ad eſſer. ℞. V. 200. men. ℞. 19264. ſi che la proportione del diametro maggior al diametro menor ſaria, come, che é dal detto diametro maggiore al detto menore, che é il propoſito. M. A. Voi diceti, che tal queſtione non é molto forte, & à me la me pare molto difficile.

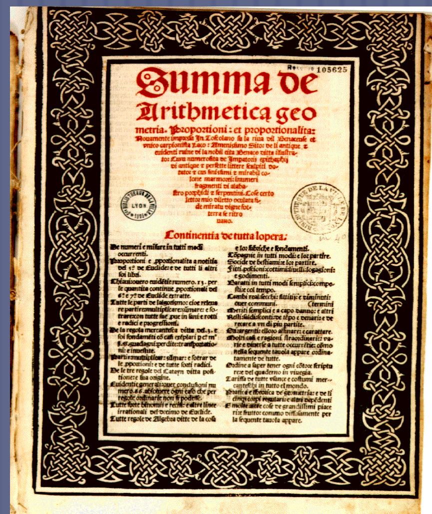
QVESITO XIIII. QVAL MI FV MANDATO A Verona da un Maeſtro Zuanne de Tonini da Coi, qual teneua ſchola in Breſſa, & me lo portò meſſer pre Antonio da Cellatica l’anno. 1530.

MAESTRO ZVANNE. Trouatime un numero, qual multiplicato per la ſua Radice piu: 3. mi faccia. 5. Simelmente trouatime. 3. numeri, ma chel ſecondo ſia. 2. piu del primo, & chel terzo ſia pur. 2. piu del ſecondo, & che multiplicato el primo fia el ſecondo, et quel produtto fia el terzo faccia. 1000. N. M. Zuane, uoi me haueti mãdato queſti uoſtri dui queſiti, come coſe impoßibile da riſoluere, ouer ignorate da uoi, pche procedẽdo p Algebra, el primo cõduſſe l’operãte, in. 1. cubo piu 3. cẽſi egual à. 5. et il ſecõdo in. 1. cubo piu. 6. cẽſi piu. 8. coſe equal à. 1000. li quali capitoli p fin à q̃ſto tẽpo é ſtato giudicato da F. Luca, & altri eſſer impoßibile à riſoluerli p regola generale, credẽdoui con tai queſiti di farui cauallero ſopra di me, & da farui tenere un grandißimo Mathematico, come che ho inteſo, che fati con tutti li altri profeſſori di tal ſcientia li in Breſſa, li quali per tema de tai uoſtri Queſiti, non oſſano à parlar con uoi, & forſi meglio intendano in tal faculta di uoi, ma per non eſſer aduertiti tãto, che baſti, credono, che uoi li ſappiati reſoluere, e p queſto ui cedono in tutto.

CC

Algebra retorica

- I testi dei problemi erano tutti "parlati"
- I due quesiti si traducono in equazioni di terzo grado
- Luca Pacioli nella Summa (1494) aveva scritto che riteneva impossibile la loro risoluzione con formule algebriche (*per regola generale*) paragonandole al problema della quadratura del cerchio
- Tartaglia inizia a pensare…



I quesiti di Zuanne de Tonini da Coi

$$x^3 + 3x^2 = 5$$

$$x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$$

x	incognita	*cosa*
x^2	quadrato	*censo*
x^3	cubo	*cubo*
termine noto		*numero*

- Tartaglia dice di avere una regola per risolvere il primo caso* ma non per il secondo
- Primo caso: *cubo* e *censi uguali a numero*
- Secondo caso: *cubo* e *censi* e *cose uguali a numero*

* ma non è vero: ha solo un modo per costruire esempi!

Che cosa si sapeva delle equazioni?

- Equazioni di 1° grado: Ebla, Egizi, Babilonesi…
- Equazioni di 2° grado:
  - Egizi: equazioni pure $x^2=5$
  - Babilonesi: danno una soluzione, metodo geometrico→completamento del quadrato
  - Arabi (~800): al-Khwarizmi scrive L'Algebra = Regola della cosa: classifica 6 tipi di equazioni di 2° grado e dà le regole risolutive: SI CONSIDERANO SOLO COEFFICIENTI POSITIVI!
- Omar Khayyam (1048 – 1131): elenca 14 casi di equazioni di 3° grado – le risolve geometricamente (intersezione di due curve, parabola e iperbole) ma non numericamente
- *"Forse uno di quelli che verranno dopo di noi riuscirà a trovare la regola…"*

Equazioni di 2° grado secondo al-Khwarizmi

CLASSIFICAZIONE

censi uguali a cose	$ax^2=bx$
censi uguali a numero	$ax^2=c$
cose uguali a numero	$ax=c$
censi e cose uguali a numero	$ax^2+bx=c$
censi e numero uguali a cose	$ax^2+c=bx$
cose e numero uguali a censi	$bx+c=ax^2$

a,b,c sono sempre positivi

La disfida veneziana

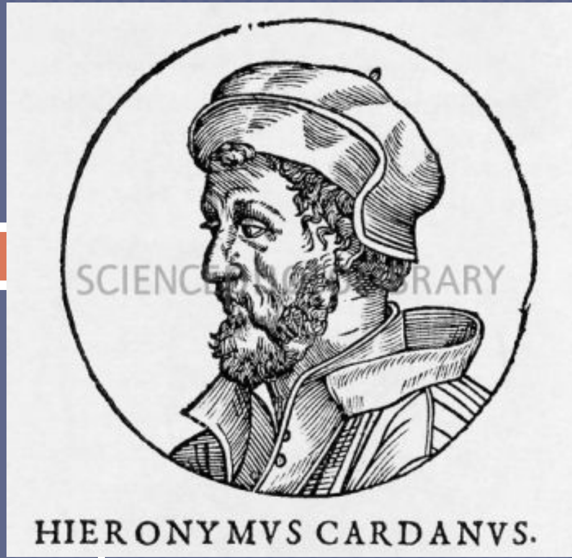
- Nel 1534, a Venezia, Tartaglia è sfidato da Antonio Maria Fior, mediocre maestro d'abaco proveniente da Bologna
- Fior propone 30 problemi, Tartaglia controbatte con altri 30 problemi
- Tartaglia risolve tutti i problemi in due ore, Fior neanche uno
- I problemi di Fior sono tutti del tipo *cubi e cose uguali a numero*

$$x^3+bx=c$$

La scoperta di Tartaglia

- Tartaglia scrive a Tonini da Coi di aver scoperto 8 giorni prima la regola generale per cubo e cose uguali a numero
- **E' una scoperta straodinaria, primo vero progresso sulle equazioni dopo i Babilonesi**
- Fior si vanta di aver avuto la regola 30 anni prima da "un gran matematico"
- Tartaglia si rifiuta di rivelare la sua formula a Tonini da Coi (e anche testi e soluzioni dei problemi)

Gerolamo Cardano



- Nato nel 1501, Cardano è un brillante affermato medico, ma anche studioso di matematica, musicologo, astrologo, …
- Abile parlatore ma vanitoso, rude, aggressivo
- Sta scrivendo un libro di matematica pratica, aritmetica, algebra e geometria, con tabelle sulle equazioni di 1° e 2° grado
- Tonini da Coi sfida Cardano con equazioni di 3° e 4° grado, e gli parla di Tartaglia

Tartaglia e Cardano

- Cardano contatta Tartaglia e gli chiede la formula
- Tartaglia rifiuta
- Cardano gli chiede i 30 problemi di Fior
- Tartaglia rifiuta
- Cardano sfida Tartaglia con 7 problemi
- Tartaglia capisce che vengono da Tonini da Coi e che Cardano non sa la risposta
- La corrispondenza tra i due ha toni ora aggressivi e sarcastici, ora contiene lusinghe

L'incontro e la formula

- Cardano invita Tartaglia a Milano
- Giura di non divulgare la formula
- Tartaglia cede e mostra a Cardano la sua "poesia algebrica"
- Contiene le regole risolutive per
  - $x^3+bx=c$
  - $x^3=bx+c$
  - $x^3+c=bx$

All'incontro è presente Ludovico Ferrari, 17enne allievo di Cardano

La poesia algebrica

Quando che'l cubo con le cose appresso

Se agguaglia a qualche numero discreto

Trovan dui altri differenti in esso

De poi terrai questo per consueto

Che'l lor prodotto sempre sia eguale

Al terzo cubo delle cose neto,

$x^3+bx=c$ $\quad$ $u-v=c$ $\quad$ $uv=(b/3)^3$

La poesia algebrica

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale

$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osserverai quest'altri contratti

Del numer farai due tal part'a volo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo

Delle qual poi, per comun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sarà il tuo concetto

El terzo poi de questi nostri conti
Se solve col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.

Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecente, quatro e trenta
Con fondamenti ben sald'e gagliardi

Nella città dal mar intorno centa.

La poesia algebrica

$u=v+c$

$v^2+vc-(b/3)^3=0$ risolvente quadratica

$(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3+b(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})=$

$=[u-3\sqrt[3]{(u^2v)} + \sqrt[3]{(uv^2)} - v] +b(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})=$

$=(u-v)+(b-3\sqrt[3]{(uv)})(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})=$

$= c$

FORMULE DI TARTAGLIA

1) $x^3 + bx = c$

$$\begin{cases} u - v = c \\ uv = \left(\frac{b}{3}\right)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v + c \\ v^2 + cv - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0 \end{cases}$$

$$v = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}, \qquad u = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

$$\Delta = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

2) $x^3 = bx + c$

$$\begin{cases} u + v = c \\ uv = \left(\frac{b}{3}\right)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = c - u \\ u^2 - cu + \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0 \end{cases}$$

$$v = \frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}, \qquad u = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

$$\Delta = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

ESERCIZI

1. $x^3+9x=26$

2. $x^3=2x+4$

3. $x^3=12x-16$

4. $x^3=15x+4$

Cardano e Ferrari

- Cardano studia la poesia e la formula
- Con Ferrari studia e risolve l'equazione generale, riducendola al caso di Tartaglia
- Ma trova un caso in cui la regola non si applica: caso irriducibile
- $x^3=bx+c$

$u+v=c$

$uv=(b/3)^3$

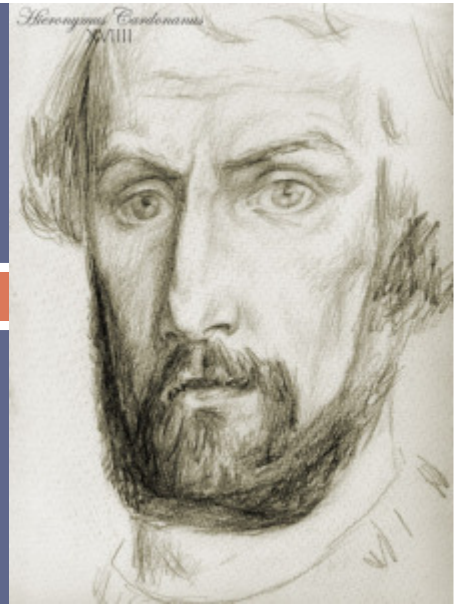
$$u=\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

$$v=\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

$$x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$$

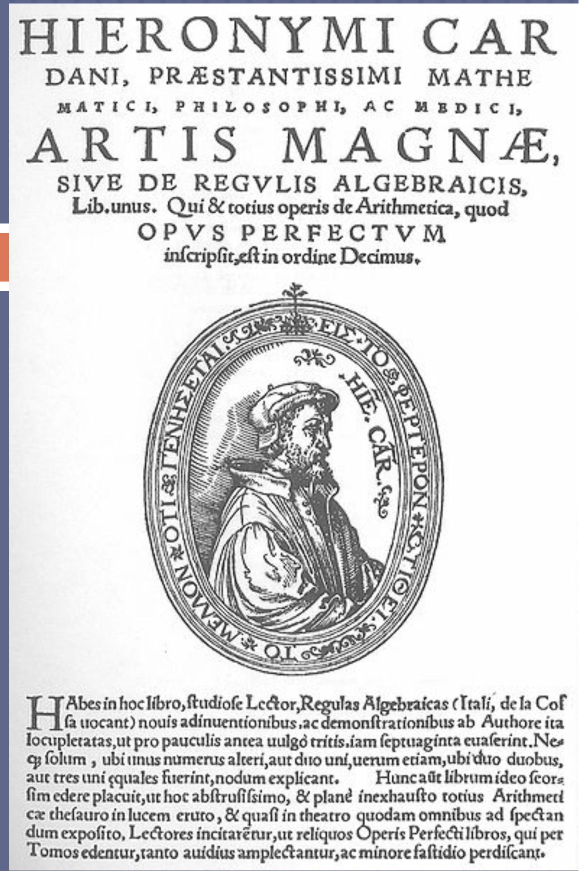
Se $(c/2)^2<(b/3)^3$?

Ludovico Ferrari



- Tonini da Coi sfida Cardano con equazioni di 3° e 4°grado
- Ferrari rileva la sfida e vince: ha trovato un metodo per risolvere le equazioni di 4°grado
- 1542: Cardano e Ferrari vanno a Bologna a trovare Annibale Della Nave
- Questi mostra un taccuino del suocero Scipione Dal Ferro, morto 15 anni prima: contiene la stessa formula trovata poi da Tartaglia!

L'Ars Magna



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

- Cardano si sente libero dal giuramento
- 1545: Scrive l'Ars Magna – inizio della matematica moderna
- Tartaglia indignato e furibondo
- Scrive Quesiti et inventioni diverse in cui racconta tutta la storia (nel frattempo aveva tradotto gli Elementi di Euclide)
- Nuova disputa feroce fra Tartaglia e Ferrari
- Discussione pubblica a Milano – Tartaglia abbandona

Epilogo

- Tartaglia muore a Venezia in solitudine e povertà
- Ferrari diventa professore a Bologna – muore avvelenato
- Cardano condannato per eresia, poi si pente, scrive la sua autobiografia
- Scrive anche molti altri libri – *De regula aliza*
- Nel caso irriducibile, sotto radice quadrata ci sono numeri negativi, ma l'equazione ha tre radici reali – *radici sofistiche*

Sviluppi successivi

- Nel 1572 Rafael Bombelli, professore a Bologna, pubblica il tomo L'Algebra, in cui introduce i numeri complessi e risolve il caso irriducibile
- Nel 1799 Paolo Ruffini, emiliano, dimostra che è impossibile risolvere per radicali le equazioni generali di grado superiore al quarto

Abel e Galois

- Nel 1824 Niels Abel ritrova il risultato di Ruffini, studia le funzioni ellittiche, pone i problemi:
  - Trovare tutte le equazioni di qualunque grado che siano risolubili per radicali
  - Decidere se una data equazione è risolubile per radicali
- Problemi risolti da Evariste Galois
- Nasce l'algebra astratta, in particolare

la teoria dei gruppi

Arrivederci!

Emilia Mezzetti

Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Sezione di Matematica e Informatica

Università degli Studi di Trieste

Via Valerio 12/1

e-mail mezzette@units.it

tel. 040 5582650